Computer assisted investigation in the teaching of mathematics

Roman Hašek University of South Bohemia

Faculty of Education, University of South Bohemia www.pf.jcu.cz



 $14^{\circ}28'56.262''E$

Objective

To present:

- the use of CAS and DGS in the mathematics teacher training courses at the Faculty of Education,
- selected collections of educational materials,
- particular examples.

Structure

- The role of CAS and DGS in mathematics teacher training courses
- The role of CAS and DGS in mathematics education. Demands of different educational levels
- Particular examples

Preparation of mathematics teachers

- Pre-service teacher training courses
- In-service teacher training courses

a competent teacher

Preparation of mathematics teachers

To develop content knowledge of such a teacher we can follow these three categories of content knowledge (according to Lee S. Shulman, 1986):

- 1) subject matter content knowledge,
- 2) pedagogical content knowledge,
- 3) curricular knowledge.

Preparation of mathematics teachers

Faculty of Education cultivates all three categories (in both pre-service and in-service teacher training).

Each of them has its own demands on the use of computers. We meet them within

- university courses,
- projects (research p. or p. oriented on practice),
- final works (thesis and dissertation),
- meeting and conferences.

1) Mathematics content knowledge

Technological support of the university mathematical courses:

- Maple
- wxMaxima
- GeoGebra
- Cabri 3D
- CoCoA

Maple

- Long tradition at the USB
- Used in regular higher-level mathematics courses
- Unsuitable for use in basic and secondary schools because of its high price and no Czech localization

Textbook: Introduction to quadrics

1.8. ROVINA SDRUŽENÁ SE SMĚREM

31

(1.67)

(1.68)

boduR = [r, s, u] bodem $R^\prime = [r^\prime, s^\prime, u^\prime],$ potom

 $(a_{11}r + a_{12}s + a_{13}u + a_{14})r' + (a_{21}r + a_{22}s + a_{23}u + a_{24})s' + (a_{31}r + a_{32}s + a_{33}u + a_{34})u' + a_{41}r + a_{42}s + a_{43}u + a_{44} = 0.$

Vztah (1.67) můžeme přepsat do tvaru

 $(a_{11}r' + a_{12}s' + a_{13}u' + a_{14})r + (a_{21}r' + a_{22}s' + a_{23}u' + a_{24})s + (a_{31}r' + a_{32}s' + a_{33}u' + a_{34})u + a_{41}r' + a_{42}s' + a_{43}u' + a_{44} = 0,$

ze kterého plyne, že polární rovina bodu R' obsahuje bod R. Důkaz opačné implikace je obdobný.

 $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 144 = 0.$

Příklad: Polární rovina bodu R = [15, -4, 5] vzhledem ke kvadrice

Obrázek 1.21: Polární rovina bodu R vzhledem k dané kvadrice (Pohled 1)





[Hašek, R., Pech, P., *Kvadratické plochy a jejich reprezentace v programu Maple,* České Budějovice: Pedagogická fakulta JU v Č. B., 2010. ISBN 978-80-7394-271-7.]



Maple smart documents for financial education

🖀 D:\Veda\TIME 2012\Presentation\ConsumerCredit Task1.mw - [Server 2] - Maple 13	×	3
Eile Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help		_
D 🖉 B 👙 X 🖻 B > ♂ T P ⇔ ⇒ 🛄 ! ♡ 🌣 ⇔ 📽 🔍 및 ಈ 🛱		
MortgageCredit_Task2.mw 🛞 ConsumerCredit_Task1.mw 🕱		
Text Math Drawing Plot Animation	Hide	
$\fbox{12 \ empty} B \fbox{12} \equiv \blacksquare \blacksquare \square \square \blacksquare \blacksquare \blacksquare$		
CONSUMER CREDIT		-
Task 1 – Purchase of a new TV set		Ξ
We want to purchase a new TV set in the value of CZK 10,000.00. The bank lends us; its interest rate amounts to 11%. Let us suppose that we borrow fo	r -	_
one year and we will pay the money at a time in the end of the year. In addition, let us suppose that the bank charges commission for granting of credit in t	ne 📗	
amount of CZK 400.00 and for administration and operation of the account CZK 200.00 a year. What is the rate of profit of the bank?		
Solution:		
First we should unassign all variables using the "restart" command. We will appreciate this initial step in a case of the recalculation of		
this document.		
restart,		
The amount of interest that we will pay to the bank		
For calculation of the rate of profit we shall firstly determine the amount of interest that we will pay to the bank in the end of the year.		
The interest will be determined by a simple calculation with percentage as follows: $u \leftarrow 10000^{\circ}0.11 - 1100.00$ CZK.	-	
The rate of profit The rate of profit will be determined based on so-called annual percentage rate (in finance known under abbreviation APR). APR takes into account, in addition to interest rate, also the charge related to granting of credit (e.g. the charges for approval and granting of credit, the charges for administration and operation of the account). Thus it is percentage rate that expresses total annual average cost of respective credit.	es	
The formula for calculation of APR is $Dl = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k};$		
$Dl = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\left(1+i\right)^{t_k}}$	(1)	
where <i>Dl</i> is the amount of loan, <i>k</i> is the instalment or charge number, <i>p</i> is the number of instalments, <i>a_k</i> is the amount of <i>k</i> - <i>th</i> instalment (the instalments also include all charges related to the Petraskova, V., Hašek, R., <i>Multimedialni pomucka pro vyuku predmetu Uvod do finan</i>	cí,	Ŧ
• Ready WWW stránka pro podporu výuky, http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/uf, 20090]s N	lath Mod	de

wxMaxima

- Free downloadable open source CAS
- Czech localization
- Used in regular freshmen courses of linear algebra and in courses on the use of computers in mathematics education

Freshmen course of Linear algebra



Moodle course in the use of wxMaxima

http://moodle.pf.jcu.cz



GeoGebra

Calculus and geometry courses



Cabri 3D

Descriptive geometry and solid geometry



2) Pedagogical content knowledge

- Finding ways of effectively using computers in mathematics education
- Diploma and doctoral thesis
- Seminar works
- Conferences, research projects

Dynamic proofs

Irena Štrausová

[http://www.geogebratube.org/student/b73724]



Archimedes' book of lemmas

Tereza Suchopárová

[http://www.geogebratube.org/student/b135598]



3) Curricular Knowledge

- Sharing of educational materials created by teachers
 - Matematech project
 <u>www.MatemaTech.cz</u>



MatemaTech

Matematika přes hranice

4.3.1. Úloha 1 – Odkud dostávám poštu?

Tato úloha trvá cca 20 minut. Žáci pro ni potřebují aplet Odkud dostávám poštu. Pomocí os úseček se mají zkonstruovat takové oblasti, které leží nejblíže každému poštovnímu úřadu.



Obrázek 1: Odkud dostávám poštu?

Poté, co žáci tuto úlohu zvládnou, zavede se pojem Voroného diagramu. Definice (Voroného diagram): Voroného oblast nějakého místa P, nazývaného také centrum, je množinou všech bodů roviny, které leží k bodu P blíže než k jinému místu. Množina všech Voroného oblastí se nazývá Voroného diagram.

Příklad 1: Voroného diagram pro 2 zadané body.

Pro 2 body *P* a *Q* se Voroného diagram skládá ze dvou Voroného oblastí, jejichž společným okrajem je osa úsečky \overline{PQ} . Pro každý bod oblasti s centrem *P* (šedě zabarvená oblast) platí, že vzdálenost k bodu *P* je menší než vzdálenost k bodu *Q*.



Obrázek 2: Voroného diagram pro 2 body

Příklad 2: Voroného diagram pro více zadaných bodů.

MatemaTech

Anwendungsbeispiele für Voronoi-Diagramme und interessante Links vorgestellt.

Zu dieser Unterrichtssequenz gibt es für die Lernenden ein Arbeitsblatt Voronoi-Diagramme, auf dem alle Aufgabenstellungen und Informationen zusammengefasst sind. Es ist sinnvoll dieses im Vorfeld an die Schülerinnen und Schüler auszuteilen. Das Arbeitsblatt und die GeoGebra-Applets findet man unter dem Link [1].

4.3.1. Aufgabe 1 – Von wo bekomme ich meine Post?

Diese Aufgabe dauert ca. 20 Minuten. Hier benötigen die Lernenden das Applet Von wo bekomme ich meine Post. Mit Hilfe von Streckensymmetralen sollen jene Bereiche konstruiert werden, die jedem Postamt am nächsten liegen.



Abbildung 1: Von wo bekomme ich meine Post?

Haben die Lernenden diese Aufgabe geschafft, wird der Begriff Voronoi-Diagramm eingeführt.

Definition (Voronoi-Diagramm): Die Voronoi-Region eines Ortes P – oft auch Zentrum genannt – ist die Menge aller Punkte der Ebene, die P näher liegen als jedem anderen Ort. Die Menge aller Voronoi-Regionen, heißt Voronoi-Diagramm.

Beispiel 1: Voronoi-Diagramm für 2 vorgegebene Punkte.

Für 2 Punkte P und Q besteht das Voronoi-Diagramm aus zwei Voronoi-Regionen, deren gemeinsamer Rand die Streckensymmetrale der Strecke \overline{PQ} ist. Für jeden Punkt der Region mit Zentrum P (grau gefärbter Bereich) gilt, dass der Abstand zu P kleiner ist als der Abstand zu Punkt Q.

30

9. Obsah alkoholu v krvi

Úvod

Mnoho náctiletých ve věku 15-16 let získává novou zkušenost z prvního setkání s alkoholem v jejich životě. Proto mají žáci v tomto věku motivaci, aby se tématem alkoholu blíže zabývali i během hodiny matematiky.

Základní informace o materiálu			
Autor	Andreas Kiener, BRG Hamerlingstraße andreas.kiener@ph-ooe.at		
Věk žáků	15-16 let		
Časová dotace	3–4 vyučovací hodiny		
Požadavky na techniku	jeden počítač na každého žáka a žákyni		
Odkazy	 [1] Pracovní list: http://www.geogebratube.org/student/m45913 (vytvořeno v programu GeoGebra) [2] Alcohol alert, článek, http://pubs.niaaa.nih.gov/publications/aa35.htm Doplňující informace: [3] http://www.mayomedicallaboratories.com/articles/drug-book/alcohol.html [4] http://en.wikipedia.org/wiki/Blood_alcohol_concentration 		

9.1. Vzdělávací cíle

Při hledání odpovědí na otázky "Jakým způsobem se zjišťuje obsah alkoholu v krvi?" a "Jak lze ovlivnit obsah alkoholu?" žáci poznají a využijí jak modely lineárního a exponenciálního růstu a poklesu, tak i modely logistického a omezeného růstu a poklesu. Výsledky analýzy reálných dat pomocí GeoGebry je přivedou k objasnění mýtů a polopravd o průběhu koncentrace alkoholu v krvi (angl. zkratka BAC, *Blood Alcohol Concentration* – pozn. překl.).

9.2. Potřebné znalosti žáků

porozumění průběhu lineární a exponenciální funkce

9.3. Popis lekce

V dostupné literatuře o průběhu koncentrace alkoholu v krvi se nejprve rychle seznámíme s informacemi o Widmarkově metodě, která se používá k odhadu

9. Blutalkoholgehalt

Einführung

Alkohol ist für viele Teenager im Alter von 15 -16 Jahren eine neue Erfahrung in ihrem Leben. Deshalb ist bei den Schülern und Schülerinnen in dieser Altersstufe die Motivation vorhanden, sich auch im Mathematikunterricht mit diesem Thema genauer auseinanderzusetzen.

Kurzinformation	
Autor	Andreas Kiener, BRG Hamerlingstraße andreas.kiener@ph-ooe.at
Alter der Schülerinnen	15–16 Jahre
Dauer	3–4 Unterrichtseinheiten
Technische Voraussetzungen	Pro Schüler und Schülerin ein Computer.
Materialien	 [1] Geogebra-Worksheet: http://www.geogebratube.org/student/m45913 (vytvořeno v programu GeoGebra) [2] Daten: http://pubs.niaaa.nih.gov/publications/aa35.htm Hintergrundinformationen: [3] http://www.mayomedicallaboratories.com/articles/drug- book/alcohol.html [4] http://en.wikipedia.org/wiki/Blood alcohol concentration

9.1. Lernziele

Die Fragestellungen "Wie sieht die Abnahme des Blutalkoholgehalts aus?" und "Wie kann der Alkoholgehalt beeinflusst werden?" führen über die Modelle des linearen und exponentiellen Wachstums und Zerfalls zu den Modellen des logistischen und begrenzten Wachstums und Zerfalls. Das Ergebnis der Untersuchungen von realen Daten mit GeoGebra ist, dass Mythen und Halbwahrheiten über den Verlauf des Blutalkoholgehalts (BAC) aufgeklärt werden können.

Mathematics education

Demands of different educational levels

- Basic school
 - geometrical vision, calculation
- Secondary school
 - abstraction, proofs







Edward Weston, Shell, 1927



Perimeter vs diameter

Obvod_kruznice_r.ggb			_ 0	x
File Edit View Options Tools Window Help			Sign in.	
	ve		() () ()	الج
Graphics	⊸ Sp	readshee	et 🔤	\boxtimes
	f_x B	/ E E	⊒ - ▼	
30-		•II A	•II B	
	53	6.1	19.16	^
	54	6.2	19.47	
25-	55	6.3	19.79	
	56	6.4	20.1	
	57	6.5	20.41	-
20-	58	6.7	21.04	
	59	6.8	21.36	
15-	60	6.9	21.67	
	61	7	21.98	
	62	7.1	22.3	
10-	63	7.2	22.61	
M 31.41	64	7.3	22.93	
	65	7.4	23.24	
5	66	7.6	23.87	
a: y = 3.14x	67	7.7	24.18	
	68	7.8	24.5	
0 5 10 15 20 25 30	69	8	25.13	-
		•	<u>۱</u>	_

Pantograph



Pantograph

Create a model of pantograph. What is a principal of this tool?



Pantograph

Repair the wrong pantograph



Poncelet – Brianchon problem

To determine the locus of the intersection of the altitudes of all the triangles that can be inscribed in a right-angle (equilateral) hyperbola



At what distance from the foot does the statue appear highest?



Johannes Müller (Regiomontanus), 1471

At what distance from the foot does the statue appear highest?



Johannes Müller (Regiomontanus), 1471



C Regiomontanus_DoTab.ggb				x
Soubor Úpravy Zobrazit Nastavení Nástroje Okno Nápověda			Přihlásit.	
			• (الجار <li< td=""></li<>
▶ Nákresna 🗵 🔻 Tabulka			(\ge
	$ f_x $	т к 🗐 🗍	∃ ∃ □ ▪	r
		A	В	
	1	f	φ	
	2	0.02	2.23°	Ξ
	3	0.04	4.45°	
	4	0.04	4.45°	
	5	0.06	6.65°	
	6	0.08	8.81°	
s	7	0.1	10.92°	4
	8	0.12	12.98°	
	9	0.14	14.98°	
30.88°	10	0.16	16.91°	
30.88*	11	0.18	18.76°	
	12	0.2	20.54°	
p	13	0.22	22.23°	
C C	14	0.24	23.84°	
	15	0.26	25.37°	
	16	0.28	26.81°	
2.83	17	0.3	28.17°	*
		•		_
vstup.			•	



hasek@pf.jcu.cz