

# **Dokumentation, Diskussion und Protokolle: Wie kommuniziert man Geometrie im Internetzeitalter?**

Ulrich Kortenkamp

**Kurzfassung:** Neue Medien sind nicht nur technisches Spielzeug, sondern bieten auch die Gelegenheit, über Kommunikation nachzudenken. Protokolle, Kodierungen, Spezifizierungen sind Beiträge der Informatik zur Wissensstrukturierung; Netzwerke und Datenbanken oder Kombinationen davon (also zum Beispiel das Internet) dienen der Kommunikation dieser Strukturen über kurze und weite Strecken, aber auch über die Dimension der Zeit hinweg.

Im Schulunterricht sind genau solche Fähigkeiten gefragt; Gruppen- oder Projektarbeit oder auch Lerntagebücher sind schon länger wirksame Mittel zum „besseren“ Lehren und Lernen. Im Mathematikunterricht, speziell in der Geometrie, können nun neue Medien, in diesem Fall Lehr-/Lernsoftware, mit den informationstechnischen Methoden verknüpft werden; in diesem Artikel versuchen wir allgemeine Richtlinien herzuleiten und stellen kurz einige durch diese Richtlinien motivierten Projekte vor.

## **1 Kommunikation als Schlüsselkonzept**

Ohne Kommunikation ist Lehren und Lernen nicht denkbar. Die Fähigkeit, Gedanken auszudrücken, Wissen weiterzugeben, Wissen zu konservieren, Diskussionen zu führen, Gedankenspiele gemeinsam durchzuführen, Gefühlses zu verbalisieren, Eindrücke zu strukturieren, ... gibt dem Menschen die Möglichkeit, sich nicht seinen Instinkten zu unterwerfen, sondern Strategien für ein besseres und soziales Leben zu entwerfen und umzusetzen.

Die Rolle der Kommunikation im Unterricht hat sich über Jahrhunderte gewandelt, eine umfassende Darstellung ist in diesem Artikel weder möglich noch gewollt. Es ist aber bemerkenswert, dass der – nur einigen wenigen Auserkorenen vorbehalten – Unterricht der Antike noch durch das Gespräch, die Schulung der Redekunst, und damit dem Erlernen von Kommunikation als Kompetenz für das weitere Studium geprägt war. Und auch heute ist es wieder allgemein anerkannt, dass Schüler, die versiert Kommunizieren können, mehr Chancen im weiteren Bildungsverlauf haben. So ist klar, dass die Kommunikationsfähigkeit ein übergeordnetes Lernziel jeden Unterrichts sein muss – auch im Mathematikunterricht!

Mathematik zeichnet sich im Gegensatz zu Geisteswissenschaften dadurch aus, dass die verwendete Fachsprache *offensichtlich* eine Fachsprache ist. Ohne geeignete Formalisierung ist es nicht möglich, mathematische Inhalte zu transportieren. Dies beginnt bereits beim einfachen Zählen und Rechnen in oder vor der Grundschule. Schülerinnen und Schüler, die keine Verbindung zwischen „gefühlten“ Zahlen und mit Ziffern geschriebenen Zahlen aufbauen, können dieses Defizit nur über mechanische Rezepte kompensieren; Erfolge in der Mathematik liegen meist außer ihrer Reichweite. Dadurch auf ihr tatsächliches mathematisches Verständnis zu schließen ist nicht ohne weiteres möglich; doch wenn dieses vorhanden ist, so bleibt die Schwierigkeit, es zu zeigen oder über den Diskurs mit anderen weiterzuentwickeln.

Die Einführung von Variablen stellt dann eine weitere Hürde für viele dar. Für einige ist es leider die letzte, da sie an ihr scheitern und damit der weitere Aufbau der Mathematik unmöglich wird. Dabei sind Variablen zunächst ein Hilfsmittel, um über Beziehungen von Zahlen und anderen Objekten sprechen zu können. Die natürliche Sprache ist nicht in der Lage, die notwendigen Referenzen in der erforderlichen Klarheit zu bilden. Stehen mehrere Unbekannte in Beziehung zueinander, dann brauchen diese Namen, und wenn diese Namen mit mathematischem Leben gefüllt werden, so erhält man Variablen.

Leider bietet sich auch kein Ausweg durch den so oft als Lösung herangezogenen Anwendungsbezug: Soll die Wirklichkeit mathematisch *modelliert* werden, so erhält man zwangsläufig Variablen, über die man „mathematisch spricht“, d.h. denen man Formeln überstülpt. Über jene kann man dann „mathematisch diskutieren“ – sie werden umgeformt, gelöst, verglichen, etc., bis man Rückschlüsse auf das eigentlich zu bearbeitende Problem ziehen kann.

Festzuhalten bleibt: Ohne Kommunikation geht es nicht.

Die Geometrie ist ein Gebiet, welches zunächst durchaus auf Zahlbegriffe verzichten kann. Dies macht es aber nicht einfacher, über Geometrie zu reden. Im Gegenteil, Geometrie dient häufig dazu, Schwierigkeiten in der Versprachlichung zu kompensieren: *ein Bild sagt mehr als tausend Worte!* Doch darin liegt auch eine Schwierigkeit – wie beschreibt man ein Bild ohne tausend Worte? Und was ist, wenn das Bild schon fehlerhaft ist, oder eine Lösung nur suggeriert? Aus diesen Fragen heraus entwickelt sich das Thema dieses Artikels: Wie kann man im Zeitalter der Information und Kommunikation die neuen Medien dazu benutzen, mit und über Geometrie zu kommunizieren? Im zweiten Kapitel werden wir uns zunächst mit der technischen Umgebung beschäftigen. Der Kommunikation von Geometrie als solcher wenden wir uns im dritten Kapitel zu, um in Kapitel 4 daraus einige Thesen zu folgern. Schließen möchten wir einen Überblick über die Projekte unserer Arbeitsgruppe geben, die sich speziell der Verbesserung von Kommunikation über oder mit Geometrie widmen.

## **2 Technisch-Informatische Aspekte der Kommunikation**

### **2.1 Hardware: Kommunikation innerhalb des Klassenraumes**

Noch vor wenigen Jahren war der Einsatz des Computers im Schulunterricht grundsätzlich räumlich an ein Informatik-Labor oder ähnliche Fachräume gebunden. Der erhebliche organisatorische und zeitliche Aufwand machte es schwer, einen didaktischen Mehrwert im Computereinsatz zu sehen.

Der technische Fortschritt nimmt dieser Hürde ihre Höhe. Der Computereinsatz ist nicht mehr nur noch an einen einzelnen Raum gebunden. Es gibt diverse Alternativen: Entweder sind bereits im Klassenzimmer Rechner vorhanden, oder die Schüler sind mit tragbaren Computern (Laptop-Klassen) oder grafischen Taschenrechnern (TI-92/Voyager, Casio Cassiopeia o.ä.) ausgerüstet.

Die Präsentation durch die Lehrerin oder den Lehrer erfolgt über spezielle Displays und Overhead-Projektoren (speziell bei Taschenrechnern) oder Computer-Projektoren (Beamer). Dies ist ein ungemeiner Fortschritt, da nur so die Ansprache an eine größere Schülergruppe computerunterstützt stattfinden kann. Noch besser geht dies mit so genannten elektronischen

Tafeln, deren Siegeszug nicht aufzuhalten sein wird (siehe u.a. <http://www.e-kreide.de/>).

So positiv diese beiden Entwicklungen auch sind, so müssen doch Vorbehalte angemeldet werden: Es ist wichtig, dass die Technik nicht die zwischenmenschliche Kommunikation behindert. Dazu gehört, dass die übliche Sitzordnung in Computerräumen abgeschafft wird – Schüler, die sich Rücken-an-Rücken befinden, können weder mit miteinander noch mit dem Lehrer reden, oder sich gegenseitig zuhören. Auch wenn Schüler in Reihen sitzen, und sich hinter den Computermonitoren verstecken können, sind Kommunikationswege so gestört, dass man nicht erwarten kann, dass guter Unterricht stattfindet. Eine erste wichtige Maßnahme ist daher immer die Gestaltung der Arbeitsumgebung im Hinblick auf die gewünschte zwischenmenschliche Kommunikation.

Laptops oder kleinere Rechner haben den Vorteil, dass sie schon allein durch ihren Formfaktor weniger behindern. Doch durch die Miniaturisierung gelangt man schnell an ein anderes Problem: schon Notebook-Rechner lassen sich nur schwer gemeinsam nutzen, erst recht nicht geht dies mit Taschenrechnern. Somit wird eventuell für die (selteneren) Kommunikation mit der Lehrerin/dem Lehrer die Kommunikation mit der Partnerin/dem Partner am Tisch geopfert. Gruppenarbeit ist schwierig unter solchen Bedingungen!

An dieser Stelle möchten wir dafür plädieren, den Computer als eine Station im Stationenlernen einzusetzen! Damit wird er seiner Rolle als unterstützendes, aber nicht allein tragendes Medium gerecht. Organisatorisch ist diese Form unproblematisch, auch sind heutzutage schon in Grundschulen oft Einzelrechner in den Klassenräumen verfügbar. Es kann ein großer Monitor benutzt werden, so dass zwei oder drei Schülerinnen und Schüler gleichzeitig arbeiten können. Es muss aber gewährleistet sein, dass die Lehrkraft nicht ständig beaufsichtigen muss, was am Computer passiert. Damit bieten sich kleine, abgeschlossene Lerneinheiten im Rahmen einer oder weniger WWW-Seiten an, die über individualisierte Schülerhilfen verfügen.

## **2.2 Protokolle:**

### **Kommunikation außerhalb des Klassenraumes**

Kommunikation findet aber nicht nur im Klassenzimmer statt; sie geht idealerweise darüber hinaus. Wir wollen zwischen dialogförmiger und unidirektionaler Kommunikation unterscheiden: Unidirektional sind die Vorgänge, die nur in den Klassenraum hinein oder nur heraus wirken. Die Re-

cherche über das Internet durch das Abrufen von Webseiten ist solch ein Vorgang, ebenso wie die Nutzung von Lexika oder ähnlichem auf CD-ROM. In die andere Richtung wirken Veröffentlichungen von Webseiten im Internet durch die Schüler (z.B. als Projektdokumentation). Sogenannte „Chats“ oder Diskussionen über eMail sind hingegen dialogorientiert.

Allen diesen Formen ist gemein, dass ihnen Protokolle – gemeint ist der technische Begriff – zugrunde liegen, die die Kommunikation regeln. Im Falle von abgerufenen Internetseiten ist dies beispielsweise das HTTP-Protokoll, über das die Seitenanforderungen und die zurück gelieferten Inhalte organisiert werden.

Hier ergibt sich eine Parallele zu üblichen Kommunikationsformen, welche nicht auf neue Medien bezogen sind. Die Anfertigung von Hausaufgaben ist ein gutes Beispiel: Auch dabei gibt es gewisse Konventionen, wie die „Anforderung“ (im Sinne von Bestellung, nicht von Leistung) gestaltet ist, und welche „Anforderungen“ (im Sinne von Leistungen, nicht Bestellungen) die angefertigte Aufgabe hat.

Bei der Analyse von möglichen Kommunikationsformen müssen also mindestens diese Formen unterschieden und berücksichtigt werden.

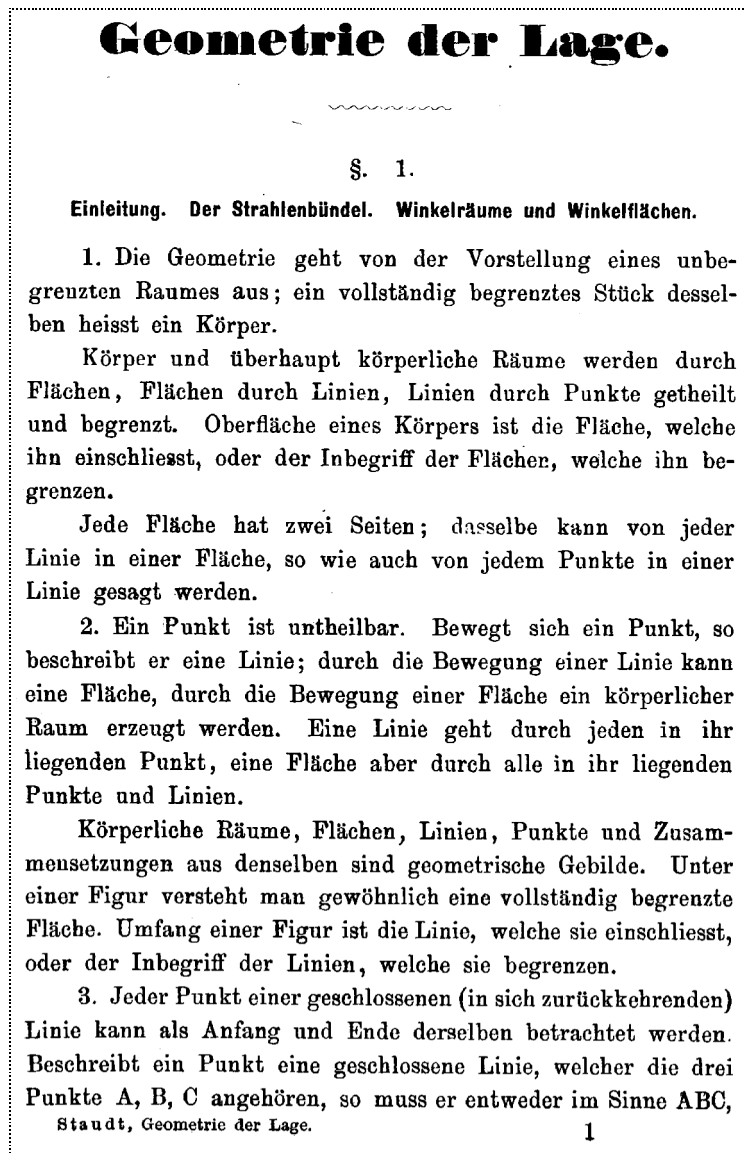
### **2.3 Software: Kommunikation mit dem Rechner**

Wie kommuniziert man mit dem Computer? Wie kann man Daten eingeben, wie kann man ihm Information entlocken?

Der Aspekt der Mensch-Maschine-Schnittstellen darf nicht unerwähnt bleiben, auch wenn er hier nicht annähernd erschöpfend ausgeführt werden kann. Als wichtigster Aspekt sei genannt, dass die Funktionalität des Rechners über die reine Reproduktion von Wissen hinausgeht. Computer können zwar nicht denken, aber sie können Daten produzieren, und damit auch, zum Beispiel in Simulationen, vom Programmierer nicht vorhergesehene Erkenntnisse liefern. Gedanken-Experimente können – und das ist neu! – tatsächlich ausgeführt werden. Entscheidend ist eben nicht die Programmierung von Aktion und Reaktion, sondern die leistungsfähige *Modellierung* von Systemen. Um solche Experimente durchführen zu können, muss aber das Modell auch so zugreifbar sein, dass die Beobachtungen als unmittelbare Erfahrungen wirken. Dafür muss die Bedienung *einfach zu erlernen* und die Effekte müssen *direkt wahrnehmbar* sein.

## **3 Kommunikation mit und über Geometrie**

Kommen wir nun endlich zum Kern, der Geometrie. Sie ist ein traditionsreicher Zweig der Mathematik, aus dem sich große Teile der heutigen Wissenschaft entwickelt haben, und gleichzeitig ein auch für den mathematischen Laien zugängliches Gebiet. Viele Anwendungen (zum Beispiel in der Architektur) ergeben sich direkt; Gebiete wie die Projektive Geometrie sind im direkten Anwendungsbezug entstanden.

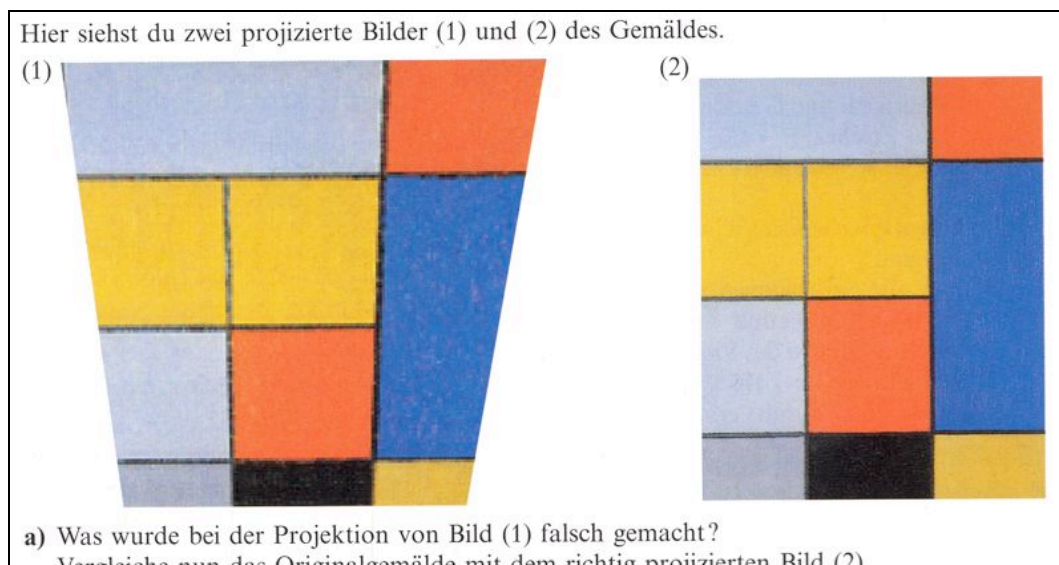


**Abb. 1:** Erste Seite der „Geometrie der Lage“ von C. von Staudt, 1847

Es war allerdings immer schwierig, Geometrie auch in Buchform zu bringen: Abbildungen waren bis vor kurzem noch teuer und aufwändig im Buch-Produktionsprozess, teils sind sie es sogar noch. Ein hervorragendes Beispiel ist das Meisterwerk „Geometrie der Lage“ (von Staudt, 1847). In

Abb. 1 sehen wir zum einen, dass dort die Geometrie ohne Illustrationen aufgebaut wird, zum anderen aber auch, wie schwierig dies ist. Wer sich nicht bereits vorstellen kann, wie der Raum aussieht, der kann es auch nicht lernen.

Viele Geometrie-Bücher enthalten nur wenige Abbildungen, obwohl dies nicht grundsätzlich eine Kostenfrage ist. Geht es um die mathematisch korrekte Beschreibung von geometrischen Sachverhalten, so ist es vom logischen Standpunkt her auch eventuell vorzuziehen, auf suggestive Abbildungen zu verzichten. Dass auch heute noch falsche Abbildungen entstehen, sieht man des Öfteren in Schulbüchern. Der in Abb. 2 gezeigte Ausschnitt ist weder den Autoren noch Herausgebern anzulasten, sondern ist das Resultat eines Herstellungsprozess, in dem die von mathematischer Unkenntnis geprägte Arbeit des Grafikers nicht noch einmal überprüft wird. Das Beispiel ist besonders passend, denn es zeigt, dass von Staudt vielleicht sinnvoll gehandelt hat, wenn er bei der Darstellung der Projektiven Geometrie auf Illustrationen verzichtete.



**Abb. 2:** Eine *falsche* falsche Projektion (aus: Elemente der Mathematik, Ausgabe für Berlin, Klasse 9, Schrödel-Verlag)

Gerade die Beschreibung von geometrischen Figuren mit Worten und Zeichen erfordert ein hohes Maß an Kommunikationsfähigkeit. So sind Zeichnungen mit ihren Beschriftungen („ein Dreieck mit den Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$ “) ideal, um das Benennen von mathematischen Objekten – später wird dies mit Zahlen durchgeführt – einzuführen und zu üben. Geometrie kann also Kommunikation fördern!

Wie schwierig dies aber auch werden kann, zeigt dann die Einführung von Namen und Variablen für Winkel. Die Unterscheidung zwischen Winkelmaß und zu messendem Winkel ist eine Aufgabe, an der manche Schulbücher scheitern, und damit unnötig Verwirrung stiften. Wenn  $\alpha$  einen Winkel in einer Zeichnung bezeichnet, darf man dann  $\alpha = 45^\circ$  schreiben? Gerade, wenn in derselben Zeit auch die Gleichungslehre begonnen wird, ist dies ein zumindest bedenkenswerter Punkt.

## 4 Forderungen

Welche Forderungen ergeben sich nun aus den allgemeinen Beobachtungen in den beiden vorhergehenden Kapiteln? Eine unvollständige Liste, die aber als Leitlinie für die Technisierung des Unterrichts dienen kann:

- *Authenzität*  
Die verwendeten technischen Hilfsmittel müssen ein korrektes Abbild der theoretischen Begriffe liefern. Etwaige Abweichungen der Implementation von der Theorie dürfen nur didaktisch, nie technisch begründet sein.
- *Experimentierfähigkeit*  
Es darf keine künstlichen oder vordergründig technisch begründeten Grenzen geben, die verhindern, dass auch unvorhergesehene Experimente durchgeführt werden.
- *Angemessenheit*  
Der Einsatz neuer Medien muss einen didaktischen Mehrwert bieten, der nicht mit herkömmlichen Methoden erreichbar ist; kein Computereinsatz um des Computers willen. Schülermotivation kann aber durchaus didaktischer Mehrwert sein!
- *Offene Kommunikationsebenen*  
Durch den Computer dürfen andere Kommunikationskanäle nicht blockiert oder behindert werden.
- *Förderung der Verbalisierung*  
Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, sich fach- und natürlichsprachlich gewandt auszudrücken. Eine rein symbolische Formalisierung reicht nicht aus.
- *Multidimensionalität*  
Die Werkzeuge sollen verschiedene Sicht- und Herangehensweisen unterstützen, um mehrere Lernenebenen zu bieten und unterschiedliche Lerntypen zu adressieren.



- Tradierbarkeit  
Gewonnene Erkenntnisse und Ergebnisse sollen in angemessener Form festgehalten und weitergegeben werden können. Dies muss ohne größeren Zusatzaufwand gelingen.

## 5 Beiträge zur Kommunikation mit DGS

Aus den oben genannten Leitlinien heraus wird die Weiterentwicklung von *Cinderella*, einem DGS für den Universitäts- und Schuleinsatz von Jürgen Richter-Gebert, TU München, und dem Autor betrieben. Exemplarisch wollen wir an dieser Stelle nur einige Projekte nennen und kurz ihre didaktische Motivation begründen. Weiterführende Informationen finden sich – dem Thema angemessen – an den angegebenen Stellen im Internet.

- *Geführte Aufgaben mit Lösungshilfen und Lernkontrolle*  
Bereits seit 1998 ist in *Cinderella* ein Modul integriert, welches es ermöglicht, Übungsaufgaben zu erstellen, die selbstständig von Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden können. Diese können nicht nur als Hausaufgabe gestellt werden, sondern sind auch ideal für oben genannte Arbeitsformen wie das Stationenlernen (siehe <http://cinderella.de/aufgaben>).
- *Elektronische Lerntagebücher*  
Arbeiten Schüler am Rechner, so fällt die Ergebnissicherung (und auch die Bewertung der Schülerarbeit) oft schwer. Mit *Cinderella* ist es, wie auch mit anderen Java-basierten DGS, möglich, interaktive Konstruktionen als WWW-Seiten abzuspeichern. In der momentan im Test befindlichen Version können auch Animationen mit Tondokumentation einfach von Schülern erstellt und elektronisch verfügbar gemacht werden. Damit erhalten wir eine adäquate Dokumentationsform für die am Rechner durchgeführten Entdeckungen und Experimente (siehe <http://cinderella.de/ELT>).
- *Natürlichsprachliche Konstruktionsbeschreibungen*  
Die Ausgabe von Konstruktionsbeschreibungen in ganzen, deutschen Sätzen ist ein mechanischer Vorgang, der problemlos in DGS integriert werden kann, und auch in vielen DGS vorhanden ist. Es fehlt hingegen an der Rückrichtung: Die Eingabe von Konstruktionen ist nur mit der Maus oder über programmiersprachen-ähnliche symbolische Eingabe möglich. Diese Lücke soll durch eine Weiterentwicklung im Rahmen des MADIN-Projektes geschlossen werden (<http://cinderella.de/spracheingabe>).
- *Visualisierung von Algorithmen*  
Diskrete Mathematik, die als stark anwendungsbezogener und theoretisch wie didaktisch ergiebiger Teil der Mathematik immer mehr in den Schulunterricht integriert wird, betont die Notwendigkeit der Al-

gorithmisierung von Problemlösungen. Im Projekt Visage des DFG-Forschungszentrum MATHEON (siehe <http://www.matheon.de> und <http://cinderella.de/visage>) werden Werkzeuge zur Visualisierung von Algorithmen entwickelt und erprobt.

- *Dynamisierte Abbildungen*  
Abbildungen sind einer der wichtigsten Zugänge zur Geometrie in der Mathematik. Da die benötigte Vorstellungs- und Abstraktionsfähigkeit für das Verständnis von Abbildungen für eine vollständig symbolische Erfassung über das für „normale“ Funktionen der rationalen Zahlen benötigte hinausgeht, integrieren wir Abbildungen als handhabbare Objekte in DGS. Diese können nicht nur angewandt, sondern auch miteinander verknüpft oder invertiert werden (<http://cinderella.de/abbildungen>).
- *Geometrie-Taschenrechner und Synchronisation von Konstruktionen*  
Die nächste Generation grafikfähiger Taschenrechner wird vermutlich in der Leistung eher mit Notebook-Rechnern als Taschenrechnern vergleichbar sein. Hochauflösende, farbige Anzeigen und enorme Rechengeschwindigkeiten machen es möglich und sinnvoll, Geometrie auf diesen Geräten zu betreiben. Der Austausch von Konstruktionen untereinander und das simultane Arbeiten an gemeinsamen Konstruktionen von verschiedenen Schülern dienen hierbei der Vereinfachung der Kommunikation im Klassenraum. *Cinderella* benutzt hierbei das TCP/IP-Protokoll (port 3770), welches es auch ermöglicht, zwischen zwei irgendwo im Internet befindlichen Rechnern Konstruktionen auszutauschen und gemeinsam synchron daran zu arbeiten (siehe <http://cinderella.de/cindypocket>).
- *Gestenbasierte Eingabe von Konstruktionen*  
Die Verwendung von DGS für Vorführungen im Klassenraum kann durch den Einsatz von elektronischen Tafeln erheblich vereinfacht werden. Eine automatische Skizzenerkennung und die Steuerung der Software über Gesten wurden von uns entwickelt. Mit diesen soll der Einsatz von DGS so einfach und natürlich sein wie das Zeichnen an der Tafel (<http://cinderella.de/scribbling>).

## 5 Literatur

Literaturhinweise zu diesem Thema sind auf den jeweiligen Projektseiten und unter <http://kortenkamp.net/literatur> im Internet verfügbar.