

Die etwas andere Vorlesung: AnOrMaL

Zeitungsartikel bergen doch immer wieder mehr Mathe, als man denkt. Das ist nicht nur eine reiche Quelle für den Schulunterricht, sondern auch für die universitäre Lehre. So erschien Anfang November 2010 im Tagesspiegel aus Berlin [1] und auch vielen anderen Zeitungen [2, 3] unter dem Titel „Falsche Preisschilder“ ein Artikel mit vielen Zahlen und, wie wir sehen werden, noch mehr anwendungsorientierter Mathematik.

Falsche Preisschilder

Verbraucherschützer: Sechs von zehn Grundpreisangaben sind falsch, das macht Vergleiche unmöglich. Der Handel bestreitet das

BERLIN – Oft werden Produkte teurer, ohne dass die Kunden das überhaupt merken. Der Verkaufspreis bleibt gleich, auch die Packung wirkt unverändert. Dass der Hersteller aber jetzt nur 120 Gramm statt – wie früher – 150 Gramm seines Müsli hineinsteckt, merkt man nur, wenn man sich die Packung ganz genau ansieht oder auf den Grundpreis achtet, den der Händler am Regal angeben muss. Dort kann man nachlesen, was 100 Gramm, ein Kilogramm oder ein Liter der Ware kosten.

Doch Verbraucherschützer schlagen jetzt Alarm: Sechs von zehn Preisschildern sind falsch, meldete am Freitag die Verbraucherzentrale (VZ) Hamburg. Die Hansesaten hatten mit 14 weiteren Verbraucherschutzzentren, darunter auch die VZ Berlin, 3225 Lebensmittel in 93 Geschäften überprüft. Das Ergebnis rückt den Handel in ein schlechtes Licht: In 601 Fällen – und damit bei fast jedem fünften Produkt – fehlte der Grundpreis völlig, kritisierten die Verbraucherschützer. Bei den

anderen 2524 Preisschildern war über die Hälfte fehlerhaft. Entweder wurde eine falsche Bezugsgröße verwendet oder der Handel hatte den Grundpreis falsch ausgerechnet, heißt es in der Studie. Hinzu kommt, dass der Grundpreis nach Meinung der Verbraucherschützer oft zu klein gedruckt oder aus anderen Gründen schlecht lesbar ist. „Ein unkomplexierter Preisvergleich ist unter diesen Bedingungen nicht möglich“, bemängeln die Verbraucherschützer.

Das ist problematisch, weil die Hersteller seit April vergangenen Jahres frei sind in der Wahl ihrer Verpackungsgrößen. Nur für Wein, Schumwein und Spirituosen gibt es noch feste Füllmengen. Bei allen anderen Produkten können sich die Produzenten aussuchen, wie groß die Packungen und wie voll sie sein sollen. Verbraucher können daher seit dem vergangenen Jahr nur noch über den Grundpreis Preisvergleiche anstellen und so unter verschiedenen Produkten ihre Auswahl treffen.

Doch in der Praxis scheitert das an der Inkompetenz des Handels. Kritisiert die VZ Hamburg. Man habe den Eindruck, „dass elementare Fachkenntnisse zur Grundpreisangabe fehlen“, moniert die VZ. Neben klaren gesetzlichen Vorgaben für die Preisangabe fordern die Verbraucherschützer von den Ländern darüber auch eine bessere Kontrolle der Läden.

Der Handel weist die Vorwürfe der Verbraucherschützer zurück. „Die Darstellung ist maßlos übertrieben“, sagte Kai Falk, Geschäftsführer des Handelsverbands HDE, dem „Tagesspiegel“. „Wann man das gesamte Sortiment betrachtet, sind die Fehlerquoten gering.“ Die Verbraucherzentralen hatten sich für ihren Marktcheck auf Milcherzeugnisse, Kondensmilch, Puddingpulver, Obst- und Gemüsekonserven sowie „Eisensuppen beschränkt. Nach Meinung des HDE verfiel das das Bild. „90 Prozent aller Angaben sind sehr gut“, betont Falk, „der Großteil ist ordentlich gekennzeichnet.“

Was kostet die Milch? So lange die Milkereien gleich große Verpackungen nehmen, ist das kein Problem. Falls nicht, hilft nur noch der Blick aufs Kleingedruckte.

Die Verbraucherzentralen haben in einer großen Untersuchung überprüft, ob denn die gesetzlich vorgeschriebene Grundpreisauszeichnung, die Kunden dabei helfen soll, Preise von Lebensmitteln auch bei verschiedenen Packungsgrößen vergleichen zu können, auch tatsächlich korrekt durchgeführt wird. Und die Zahlen sind alarmierend: 6 von 10 Preisschildern sind falsch! Das sind ja 60%! In 601 Fällen, fast 20%, fehlt die Grundpreisangabe völlig! Beim Rest ist über die Hälfte fehlerhaft (das hätten wir jetzt auch schon selbst ausrechnen können)...

Nun, diese Rechenaufgaben sind sicher nicht ergiebig genug für eine Mathematik-Vorlesung. Stutzig macht aber der Satz des HDE-Geschäftsführers: „80% aller Angaben sind sehr gut“ – wie kann das sein? Wer hat nun Recht, die Verbraucherzentralen [4, 5] oder der Handelsverband [6]? Und das bei einer doch so objektiven Sache wie Mathematik: Man muss das doch überprüfen können.

Mathematik als Entscheidungswissenschaft

Ja, man kann es überprüfen. Dazu benötigt man nur den Gesetzestext [7, 8] und genügend Studierende, die bereit sind die Preise zu erfassen und die Grundpreisangaben nachzurechnen. In der Veranstaltung „AnOrMaL – Anwendungsorientiert Ma-

thematik Lernen“ an der PH Karlsruhe beschlossen wir, die Preise und Grundpreise für Molkereiprodukte in acht Lebensmittelmärkten – ALDI, Alnatura, EDEKA, Füllhorn, Lidl, Netto, Penny und REWE – im Raum Karlsruhe zu erfassen und nachzuprüfen. Ob die Grundpreisangaben in der richtigen Größe oder an der richtigen Stelle oder mit der korrekten Bezugsgröße angegeben wurden, war dabei nebensächlich. Spannender war die Frage, ob tatsächlich Grundpreise falsch *ausgerechnet* wurden, wie im Zeitungsartikel behauptet. Dies wäre schockierend, denn es handelt sich ja nicht nur um das Standardthema Proportionalität der Sekundarstufe I, sondern wir gehen davon aus, dass diese Grundpreise mit Hilfe des Computers automatisiert berechnet werden. Das kann doch nicht falsch sein! Oder?

Die Erfassung der Preise verlief weitgehend problemlos, auch wenn manche Marktleiter nicht damit einverstanden waren, dass bei ihnen recherchiert wird. Und so schafften wir es auch rasch, eine Tabelle zu erstellen, die in einem Tabellenkalkulationsprogramm binnen Sekunden überprüft werden konnte. Wir fanden viele Fehler, zwar nicht so viele, wie die Verbraucherzentralen, aber doch mehr als erwartet. Und wir lernen die erste Lektion: Man überprüfe immer die Rohdaten! Natürlich gab es viele Abschreib- und Eingabefehler – das ist das Leben. Unermüdliche Studierende zogen wieder aus und überprüften die Tabellen in den Märkten und konnten so dafür sorgen, dass das Datenmaterial schließlich zuverlässig war.

Auch nach der Korrektur der selbst eingebauten Fehler lagen manche Preise um mehrere Zehnerpotenzen daneben: hier hat jemand bei der Erfassung im Kassensystem des Marktes nicht auf die Einheiten geachtet. Auch kam es vor, dass bei einem Sonderangebot noch die alte, höhere, Grundpreisangabe angeschrieben war; sicher kein Grund zur Aufregung. Nur bei zwei Ketten gab es noch einige andere Fehler: Bei EDEKA und bei Netto wurden Grundpreise falsch gerundet.

NUMB3RS

Nicht die bekannteste und vermutlich auf Grund ihres starken Mathematik-Bezugs sicher auch nicht die beliebteste Serie im deutschen Fernsehen ist „NUMB3RS – Die Logik des Verbrechens“. Sie wurde von ProSieben über SAT.1 zu „kabel eins“ durchgereicht, mehr als die sechs bisher produzierten Staffeln wird es nicht geben, da die amerikanische CBS die Serie eingestellt hat. Die Handlung der Folgen folgt immer dem gleichen Muster – ein Verbrechen geschieht, und ein junger, dynamischer, etwas abgehobener aber dennoch sympathischer, kurz: genialer Mathematikprofessor löst den Fall oder rettet die Menschheit mit Hilfe von angewandter Mathematik. Natürlich sind die Methoden manchmal absurd oder auch falsch dargestellt, aber die Sendung hat, wenn man ein bisschen mehr Mathematik beherrscht, als in der Schule gelehrt wird, durchaus Unterhaltungswert. So berichtete mir einmal ein Student, dass er beim Fernsehen ein Erfolgserlebnis hatte weil er etwas mit

der Aussage „P ungleich NP“ etwas anfangen konnte; wir hatten gerade Komplexität von Algorithmen als Thema.

Auch in der „AnOrMaL“-Veranstaltung gab es einen NUMB3ERS-Moment: Warum gerade fanden wir sowohl bei EDEKA als auch bei Netto einen Fehler, der bei den anderen Märkten nicht auftrat? Beide Märkte haben ein Rundungsproblem; Preise, die nach kaufmännischen Regeln aufgerundet werden müssten, wurden abgerundet. Mathematik half uns hier etwas aufzudecken, was eine rasche Wikipedia-Recherche bestätigt: beide Märkte gehören zum gleichen Konzern [9].

Systematische Fehler und das Dualsystem

Die falsche Rundung könnte man als Programmierfehler abtun, wenn sie konsequent durchgehalten würde. Doch das ist nicht so: Bei 200g Joghurt, die 29ct kosten, werden (falsch) 14ct pro 100g angegeben, bei 200g Joghurt einer anderen, teureren, Sorte für 69ct pro Becher werden (korrekt) 35ct pro 100g angegeben. Bei der Umrechnung von 200g auf 100g, also bei der Division des Preises durch 2, treten durch die psychologisch günstigen auf 9ct endenden Preise immer Grundpreise auf, bei denen ein halber Cent übrig bleibt. Und mal wird aufgerundet, mal wird abgerundet, ohne erkennbares System, dafür aber konsequent für jeden vorkommenden Preis gleich. $29\text{ct}/2$ sind immer 14ct, $69\text{ct}/2$ sind immer 35ct. Wie kann das kommen?

Hier wird es spannend und wir erschließen neben dem Thema „Proportionalität“ noch ein weiteres, das meist der Grundschule vorbehaltenes Thema „Stellenwerttafeln“. Unser übliches Zahlensystem basiert auf 10er-Potenzen. Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender und mehr werden in der Grundschule (zu Recht) lange besprochen. Es wird viel damit gearbeitet, schriftliche Rechenverfahren leben von diesem System, da man dank der Stellenwerte und mit etwas Systematik das Addieren und Multiplizieren auch mit großen Zahlen auf das Addieren im Zahlenraum bis 20 und das kleine 1×1 zurückführen kann. Nur: Computer (und die sollen ja für uns rechnen) rechnen mit einem noch einfacheren Stellenwertsystem, den Dualzahlen. Statt 10er-Potenzen brauchen wir 2er-Potenzen, statt den Ziffern 0-9 benötigen wir nur die 0 und die 1. Alles andere geht genauso.

Auch Brüche werden im Zweiersystem genauso gehandhabt wie im Zehnersystem. Entspricht die erste Stelle hinter dem Komma im Dezimalsystem einem Zehntel so entspricht sie im Dualsystem einem Halben. Die zweite Stelle hinter dem Komma sind im Dezimalsystem Hunderstel, im Dualsystem Viertel, und so fort. Statt negativer Zehnerpotenzen entsprechen die Stellen hinter dem Komma im Dualsystem negativen Zweierpotenzen. Ganz klar wird dies, wenn man sich verdeutlicht, dass das Verschieben des Kommas im Dezimalsystem dem Multiplizieren mit oder Dividieren durch 10 entspricht, im Dualsystem aber dem Verdoppeln und Halbieren.

Die Umrechnung zwischen den Systemen ist bei ganzen Zahlen eine einfache Übung. Für Brüche muss man ein wenig nachdenken, aber auch das schafft man. Die Umrechnung vom Dualsystem in das Dezimalsystem ist sehr einfach, denn wir müssen nur die Summe der mit einer **1** gekennzeichneten Zweierpotenzen ausrechnen. Für die andere Richtung müssen wir die passenden Zweierpotenzen finden. Ein paar Beispiele („normale“ Zahlen im 10er-System schreiben wir normal, Zahlen im Dualsystem mit den Ziffern **0** und **1**, um sie leichter unterscheiden zu können, und weil es mehr nach Computer aussieht): 0,5 entspricht **0,1**; 0,75 entspricht **0,11**, da $1/2 + 1/4 = 0,75$; $0,5625 = 1/2 + 1/16$, entspricht also **0,1001**.

Was ist die Darstellung des Dezimalbruchs 0,1 im Dualsystem? Dafür gehen wir systematisch vor. Wir beginnen mit $1/2$ – diese Zahl ist größer als 0,1, die erste Stelle der Dualbruchentwicklung ist also zwangsläufig eine **0**. Die nächste Zweierpotenz, $1/4$, ist ebenfalls zu groß, wie auch $1/8 = 0,125$. Erst $1/16 = 0,0625$ passt. Die Darstellung beginnt also mit **0,0001**. Es bleibt noch ein Rest von $0,1 - 0,0625 = 0,0375$. Da $1/32 = 0,03125$ kleiner ist, folgt eine weitere **1** in der Dualdarstellung. Wir führen dies tabellarisch weiter:

Rest vorher	2er-Potenz	Bit	Rest nachher
0,1000000000000000	0,5000000000000000	0	0,1000000000000000
0,1000000000000000	0,2500000000000000	0	0,1000000000000000
0,1000000000000000	0,1250000000000000	0	0,1000000000000000
0,1000000000000000	0,0625000000000000	1	0,0375000000000000
0,0375000000000000	0,0312500000000000	1	0,0062500000000000
0,0062500000000000	0,0156250000000000	0	0,0062500000000000
0,0062500000000000	0,0078125000000000	0	0,0062500000000000
0,0062500000000000	0,0039062500000000	1	0,0023437500000000
0,0023437500000000	0,0019531250000000	1	0,0003906250000000
0,0003906250000000	0,0009765625000000	0	0,0003906250000000
0,0003906250000000	0,0004882812500000	0	0,0003906250000000
0,0003906250000000	0,0002441406250000	1	0,0001464843750000
0,0001464843750000	0,0001220703125000	1	0,0000244140625000
0,0000244140625000	0,0000610351562500	0	0,0000244140625000
0,0000244140625000	0,0000305175781250	0	0,0000244140625000

Diese Tabelle könnten wir unendlich fortführen – die so harmlos wirkende Zahl 0,1 hat die periodische Dualdarstellung **0,0001100**. Und so geht es uns nicht nur mit einem Zehntel, sondern mit den meisten Dezimalbrüchen.

Versucht man mit Hilfe des oben genutzten Tabellenverfahrens eine Zahl wie 0,29 in das Dualsystem zu überführen, damit sie auf dem Computer gespeichert und benutzt werden kann, dann kann man dies mit einer endlichen Anzahl Stellen (bits) nicht bewerkstelligen. Nehmen wir der Übersichtlichkeit halber an, dass die Preise mit 8 Dual-Stellen hinter dem Komma repräsentiert werden. Dies sollte genügen, immerhin ist $\frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} = 0,00390625$, wir können also bis auf eine „Auflösung“ von 0,4ct genau alle Preise treffen. In der Realität werden natürlich mehr Stellen verwendet, dies ändert aber nichts am prinzipiellen Problem.

Für 0,29 als Startwert ergibt die „Tabellenmethode“ die Dualdarstellung **0,01001010**, dies entspricht im Dezimalsystem 0,2890625.

Für 0,69 als Startwert ergibt die „Tabellenmethode“ die Dualdarstellung **0,10110000**, dies entspricht im Dezimalsystem 0,6875.

Beide Preise können wir einfach durch zwei teilen, sogar ohne Verlust der Genauigkeit, indem wir das Komma der Dualdarstellung eine Stelle nach links verschieben. Die Hälfte von **0,01001010** ist demnach **0,00100101**, das sind 0,14453125, gerundet auf zwei Stellen hinter dem Komma also 0,14 – der falsche Cent-Preis für 100g Billig-Joghurt!

Die Hälfte von **0,10110000** ist **0,01011000**, das sind 0,34375, gerundet auf zwei Stellen hinter dem Komma sind das 0,34 – der korrekte Cent-Preis für teureren Joghurt... Moment! Das wäre der *falsch* abgerundete Cent-Preis für den teureren Joghurt! Jetzt haben wir zwar eine Erklärung für das falsche Abrunden, aber noch nicht für das korrekte Aufrunden gefunden.

Die Lösung liegt bei der letzten Stelle, die nach der Tabellenmethode nur dann auf **1** gesetzt wird, wenn der Rest noch größer als die zu vergebende Zweierpotenz ist. Brechen wir aber nach dieser Stelle ab, so kann es sein, dass eine **1** statt einer **0** auf der letzten Stelle die Genauigkeit der Darstellung erhöht, auch wenn dadurch der Dualbruch größer als der darzustellende Dezimalbruch wird. Für die 0,69 ist dies der Fall. Der Dualbruch **0,10110001** = 0,69140625 ist größer als 0,69, approximiert aber mit einer Differenz von 0,00140625 besser als **0,10110000** = 0,6875 mit einer Differenz von 0,0025. Für die billige 0,29 ist dies nicht so, hier ist die Differenz von **0,01001010** zum gewünschten Wert nur 0,0009375 im Gegensatz zur Differenz 0,00296875 zu **0,01001011**. Der Rundungsfehler tritt also bei 0,69 nicht auf, da die Dualdarstellung von 0,69 in Wahrheit größer als 0,69 ist.

Für andere Genauigkeiten und andere Preise tritt der Fehler mal so, mal so auf, man könnte also noch versuchen herauszufinden, mit welcher Genauigkeit die beiden Märkte rechnen. Das ist aber nicht mehr interessant – Tatsache ist, dass die interne Darstellung von Preisen bei diesen Märkten offenbar nicht für die korrekte Berechnung von Grundpreisen geeignet ist. Man könnte dies am einfachsten lösen, indem man die Preise als ganze Zahlen darstellt, also stets in Cent statt Euro rechnet.

Ist das überhaupt ein Problem?

Für die Studierenden in der Veranstaltung war es überraschend zu sehen, dass es tatsächlich auch oder gerade mit dem Computer nicht trivial ist, Proportionalitäten zu berechnen, und dass verschiedene Stellenwertsysteme sich extrem unterscheiden können, wenn man auch Stellen rechts des Kommas betrachtet. Die wirkliche Relevanz für den Alltag kann man an diesem Beispiel aber nicht erkennen. Würden Sie ihre Joghurt-Entscheidung von einem Cent Abweichung abhängig machen? Sicher nicht. Zudem bleiben die Grundpreise auch korrekt geordnet, wenn es also nur um den Vergleich geht, dann ist diese falsche Angabe sicher kein Problem.

Es gibt aber heutzutage immer mehr Stellen, an denen Rechnungen automatisch durch den Computer erstellt werden. Dabei versucht man oft eine größere Fairness über eine granularere Abrechnung herzustellen. Handy-Gespräche werden im Minuten- oder gar Sekundentakt abgerechnet, schneller heißt hier fairer. „Intelligente Stromzähler“ (damit meinen wir nicht die freundlichen Menschen, die von Haus zu Haus laufen und Zähler ablesen) berechnen jede Stunde aufs Neue den Stromverbrauch und können dadurch Strom zum jeweils aktuellen Tarif anbieten – der Computer macht es möglich. Wenn wir aber jede Stunde eine Proportionalität berechnen, und nichts anderes ist ja die Abrechnung nach reinem Verbrauch, dann können wir uns jede Stunde um einen Cent „aus technischen Gründen“ vertun. Das macht dann schlimmstenfalls 24 Cent pro Tag, oder knapp 90 € pro Jahr. Spätestens diese Überlegung hat die Studierenden davon überzeugt, dass ein höherer Blick auf die Mathematik sich lohnt!

Zum Veranstaltungskonzept

Die Veranstaltung „AnOrMaL – Anwendungsorientiert Mathematik Lernen“ [8] wurde von Prof. Christian Spannagel, PH Heidelberg, und dem Autor für Lehramtsstudierende an den Pädagogischen Hochschulen konzipiert. Primäres Ziel ist nicht die Vorstellung möglichst vieler mathematischer Anwendungen oder der Überblick über die Bonbonniere der schönsten Anwendungen, sondern das Erkennen von Mathematik im Alltag, die Änderung der Einstellung zur Mathematik zum Positiven, die Erziehung zu Selbstständigkeit und Experimentierfreude, die Vermittlung einer positiven Einstellung zum Medieneinsatz, Medienkompetenz und Erleben von Methodenvielfalt. Im Idealfall haben die Studierenden nach dem Besuch der Veranstaltung selbst den Wunsch, Bücher über Anwendungsorientierte Mathematik zu lesen. Davon gibt es eine reiche Auswahl, sowohl moderne Werke, als auch Klassiker wie zum Beispiel die „Lebendige Mathematik“ von Lietzmann. Es ist unseres Erachtens nicht möglich und nicht sinnvoll, möglichst viel von diesen Büchern zu präsentieren, sondern wir müssen zunächst dafür sorgen, dass die

Studierenden ihre Scheu und Ehrfurcht vor und in vielen Fällen sogar ihre Abneigung gegen Mathematik ablegen.

Eine Auswertung der Veranstaltung über von den Studierenden gemalte *rich pictures* konnte bestätigen, dass dieses Konzept aufgeht – viel Mathematik haben die Studierenden nicht gelernt, aber sie waren durchgehend davon überzeugt, dass Mathematik für alle Bereiche des Lebens wichtig und grundlegend ist. Zudem wurden keinerlei negative Assoziationen mehr mit Mathematik-(Unterricht) verbunden (Abb. 1).

Internet-Quellen (überprüft Mai 2011)

- [1] Der Tagesspiegel, Berlin. „Falsche Preisschilder“, Zeitungsartikel, 5.11.2011. URL: <http://www.tagesspiegel.de/wirtschaft/falsche-preisschilder/1975520.html>.
- [2] Berliner Morgenpost. „Verbraucherschützer kritisieren falsche Preisangaben“, Zeitungsartikel, 6.11.2011. URL: <http://www.morgenpost.de/wirtschaft/article1443481/Verbraucherschuetzer-kritisieren-falsche-Preisangaben.html>.
- [3] Welt Online. „Verbraucherschützer kritisieren falsche Preisangaben“, Artikel vom 6.11.2011. URL: <http://www.welt.de/wirtschaft/article10758338/Verbraucherschuetzer-kritisieren-falsche-Preisangaben.html?wtmc=RSS.Wirtschaft.Wirtschaft>.
- [4] Verbraucherzentrale Hamburg: „Grundpreise nur mit Lupe“. Pressemitteilung. URL <http://www.vzhh.de/ernaehrung/95251/grundpreisauszeichnung-im-lebensmitteleinzelhandel-mangelhaft.aspx>.
- [5] Verbraucherzentrale Brandenburg: „Grundpreisangaben im Lebensmitteleinzelhandel“. Bericht. Potsdam, Oktober 2010. URL: <http://www.vzhh.de/docs/95290/link.asp>
- [6] HDE. Entgegnung auf den Bericht der Verbraucherzentralen. URL: <http://www.einzelhandel.de/pb/site/hde/node/1244839/Lde/index.html>.
- [5] IHK Frankfurt: „Informationen zur Preisangaben- und Fertigpackungsverordnung“. URL: <http://www.frankfurt-main.ihk.de/recht/themen/gewerberecht/grundpreis/index.html>.
- [6] Bundesministerium der Justiz: Preisangabenverordnung §2: „Grundpreis“. URL: http://bundesrecht.juris.de/pangv/_2.html.
- [7] Wikipedia: EDEKA. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Edeka>.
- [8] CERMAT-Wiki: AnOrMaL URL: <http://cermat.org/wiki/index.php/AnOrMaL>.

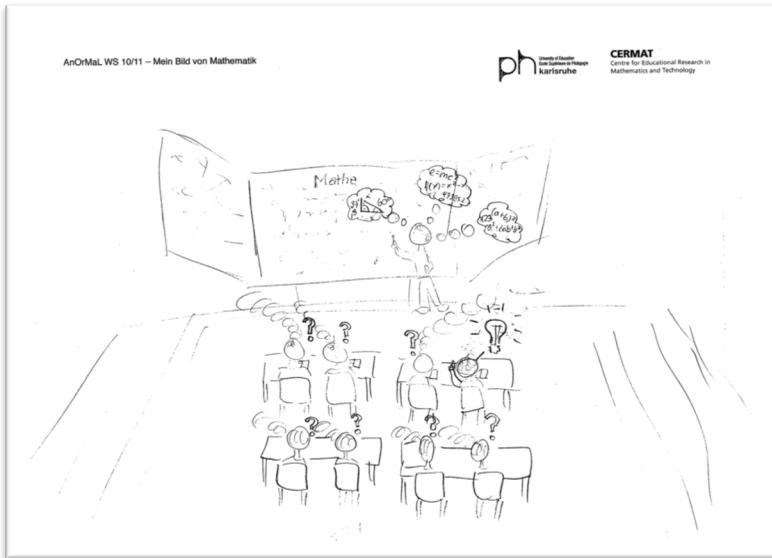


Abbildung 1: Die *rich pictures* einer Studentin der Vorlesung zu Beginn und am Ende des Semesters. Das Bild von Mathematik wandelt sich deutlich von einem negativen Schulbild hin zur Auffassung, dass Mathematik überall ist. Zudem wird Mathematik mit einer positiv belegten „Jahmarkt“-Situation verbunden.
