

Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie in Cinderella

Ulrich H. Kortenkamp und Jürgen Richter-Gebert
Institut für Theoretische Informatik, ETH Zentrum, CH-8092 Zürich.

1. EINLEITUNG

Programme zur dynamischen Geometrie halten seit geraumer Zeit Einzug in die Klassenräume der Schulen und in die Studierzimmer der Mathematiker. Die wesentliche Eigenschaft dieser Programme ist die Möglichkeit, mittels Mausclicks Konfigurationen der Elementargeometrie erstellen zu können, die dann anschliessend in einem “Zug-Modus” dynamisch und fliegend variiert werden. Ein wichtiges inhaltliches Element solcher Programme ist das zur Verfügung stellen von *geometrischen Primitivoperationen*, die es erlauben, einfache Konstruktionsschritte wie das Einzeichnen eines Schnittpunktes, einer Parallelen oder eines Kreises durchzuführen.

Während die meisten derzeit erhältlichen Programme eine relativ gute Unterstützung für euklidische Geometrie aufweisen, fällt die Unterstützung nicht-euklidischer Geometrien (wie z.B. hyperbolischer Geometrie) eher spärlich aus. Dies liegt daran, dass die internen Darstellungen der geometrischen Grundelemente und Operationen in aller Regel sehr eng auf euklidische Geometrie bezogen sind. Unterstützung nicht-euklidischer Geometrien kann dann nur über von Hand programmierte Makros oder andere Workarounds gewährleistet werden.

Das von uns entwickelte neuartige Geometrieprogramm *Cinderella*¹ geht hier einen anderen Weg. Es wurde von Anfang an darauf geachtet, Koordinatenrepräsentationen der Objekte zu wählen, die hinreichend allgemein sind, um eine grosse Zahl verschiedener Geometrien zu modellieren. Auf diese Weise werden nicht-euklidische Geometrien zum integralen Bestandteil von *Cinderella*, deren Handhabung ebenso einfach ist wie die der normalen euklidischen Geometrie.

Dieser Artikel soll in die hinter der Implementierung stehenden mathematischen Hintergründe einführen. Wesentliche Teile der Theorie basieren auf den Erkenntnissen der grossen Geometer des neunzehnten Jahrhunderts. Der Leser möge uns daher die häufigen historischen Ausflüge verzeihen. Insbesondere stellt der Artikel eine Art “Crashkurs” in die 1871 von *Felix Klein* entworfenen *Cayley-Klein-Geometrien* dar, dem wesentlichen Werkzeug zum vereinheitlichten Umgang mit euklidischen und nicht-euklidischen Geometrien.

¹**Anmerkung:** Alle Illustrationen dieses Artikels bis auf Abb. 3 wurden mit *Cinderella* erstellt. Eine Demoversion ist erhältlich unter www.cinderella.de.

2. GANZ ALTE, ALTE UND NEUE GEOMETRIE

2.1. Euklids Geometrie. Es gibt viele Wege sich euklidischer Geometrie zu nähern. Euklids (330-275 v. Chr.) ursprünglicher Weg war es, die “offensichtlichen” Tatsachen der Geometrie als *a priori evidente* Axiome zu formulieren und daraus die weniger offensichtlichen Tatsachen durch eine Kette von logischen Folgerungen als Lehrsätze abzuleiten. Was dabei als *a priori evident* angesehen wurde, hing in hohem Masse von Euklids Auffassung und Erfahrung der geometrischen Welt ab. Er versuchte, die Regeln des alltäglichen Umgangs mit Punkten, Geraden und Kreisen als ein logisches Gebilde von Axiomen und Sätzen zu ordnen. Hierbei waren die Punkte, Geraden und Kreise die grundlegenden Objekte. Neben etlichen Konventionen, Begriffsklärungen und Definitionen fusst Euklids Geometrie auf den folgenden fünf Axiomen:

- A1 Man kann von jedem Punkt zu jedem Punkt die Strecke ziehen.
- A2 Man kann eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern.
- A3 Man kann mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis ziehen.
- A4 Alle rechten Winkel sind einander gleich.
- A5 Wenn zwei Geraden mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als ein flacher Winkel ist, so schneiden sie sich bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite.

Auffallend ist hierbei, das die Formulierung des fünften Axioms (eine Form des berühmten Parallelenpostulats) weitaus komplexer ist als die der übrigen Axiome. Dies hat vermutlich seinen Grund darin, dass Euklid selbst nicht von der Notwendigkeit bzw. logischen Unabhängigkeit dieses Axioms überzeugt war. Insbesondere vermeidet Euklid in den ersten vier seiner insgesamt dreizehn Bücher vollkommen den Rückgriff auf dieses Axiom. Aus heutiger Sicht lassen sich für das Parallelenpostulat wesentlich einfachere und äquivalente Formulierungen angeben. Beispielhaft seien hier einige genannt:

- A5₁ Zu jeder Geraden G und jedem Punkt P , der nicht auf G liegt, gibt es *genau eine* Gerade durch P die G nicht schneidet.
- A5₂ Es gibt ein Rechteck (ein Viereck mit vier rechten Winkeln).
- A5₃ Die Winkelsumme in jedem Dreieck ist 180° .
- A5₄ Es gibt ähnliche Dreiecke, d.h. Dreiecke bei denen entsprechende Winkel übereinstimmen, aber nicht entsprechende Seiten.

Die Frage ob das Parallelenpostulat letztlich unabhängig ist oder ob es andere “Geometrien” gibt, die zwar die ersten vier Axiome erfüllen, nicht aber das Parallelenpostulat, sollte sich als eine der fruchtbarsten Fragestellungen der gesammtem Mathematik erweisen, deren Klärung mehr

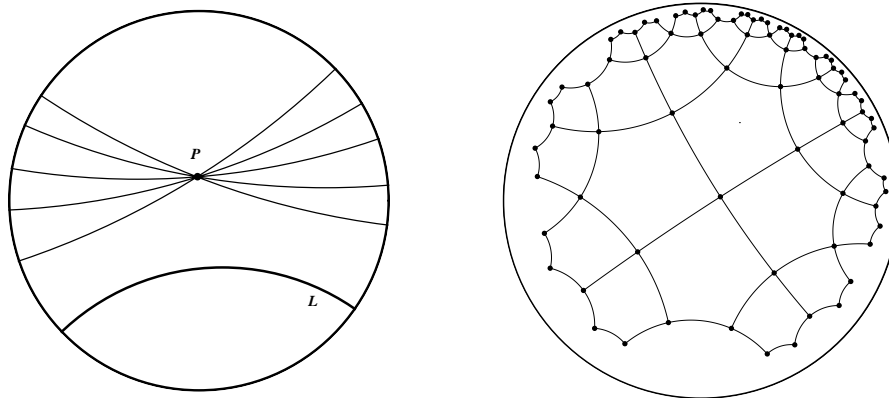


Abb. 1: Viele Parallelen einer Geraden in hyperbolischer Geometrie. Parke-
tierung der hyperbolischen Ebene mit "gleichgrossen" Fünfecken.

als zweitausend Jahre erforderte. Heute wissen wir, dass gleichberechtigt neben der klassischen euklidischen Geometrie auch noch weitere *nicht-euklidische Geometrien* existieren, in denen das Parallelenpostulat nicht gilt. Den Unterschied dieser Geometrien zur euklidischen Geometrie macht man sich am besten an unserer Version $A5_1$ des Parallelenpostulates klar. In der sogenannten hyperbolischen Geometrie, welche unabhängig von *Gauss, Bolyai und Lobatschewski* zwischen 1815 und 1832 entdeckt wurde, gilt das folgende veränderte Postulat (vgl. Abb. 1, links):

$A5_{hyp}$ Zu jeder Geraden G und jedem Punkt P , der nicht auf G liegt, gibt es *unendlich viele* Geraden durch P die G nicht schneiden.

Es ist ebenso möglich das Parallelenpostulat in der folgenden Form zu verändern:

$A5_{ell}$ Zu jeder Geraden G und jedem Punkt P , der nicht auf G liegt, gibt es *keine einzige* Gerade durch P die G nicht schneidet.

Dies führt zur sogenannten *elliptischen Geometrie*, die grob gesprochen der Geometrie auf einer Kugeloberfläche entspricht, wobei sich antipodal gegenüberliegende Punkte der Kugel identifiziert werden. Geraden werden hierbei durch Grosskreise auf der Kugel dargestellt. Genau genommen muss dann auch das Axiom $A2$ fallen gelassen werden, da eine beliebig verlängerte Strecke auf der Kugel irgendwann wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt.

2.2. Computergeometrie und die Geometrie des letzten Jahrhunderts.

Vom Standpunkt eines dynamischen Geometrieprogramms stellt sich die Herangehensweise an Geometrie ein wenig anders dar. Im Computer sind geometrische Objekte wie Punkte, Geraden oder Kreise durch *Zahlen*, ihren

Koordinaten, repräsentiert. Erst die Darstellung auf dem Bildschirm macht diese Koordinaten zu visuell erfahrbaren Objekten. Vom Standpunkt des Programmierens stellt sich der Umgang mit geometrischen Objekten als ein Rechnen mit deren Koordinaten dar. Je eleganter und flexibler der algebraische Umgang mit den Koordinaten der Objekten gestaltet werden kann, desto flexibler, robuster und übersichtlicher wird das Programm.

Hier erweisen sich die Arbeiten der grossen Geometer des neunzehnten Jahrhunderts als ein unermesslicher Schatz. Zu dieser Zeit spielte der algebraische Zugang zur Geometrie eine überragende Rolle. Ziel war es elegante und allgemeine algebraische Ansätze zu finden, die es ermöglichten, einen vereinheitlichenden Überblick über die Vielzahl der geometrischen Objekte, Operationen und Effekte zu gewinnen. Als herausragende Protagonisten dieser Periode seien hier nur drei Namen genannt.

Victor Poncelet (1788-1867) studierte als erster konsequent die Hinzunahme von *unendlich fernen Elementen* zur euklidischen Ebene. Er erlangte dadurch eine vereinheitlichte Betrachtungsweise vieler Spezialfälle der euklidischen Geometrie. Die von Poncelet geschaffene Theorie wird heute als *projektive Geometrie* bezeichnet. Viele der dort auftauchenden Elemente haben ihren Ursprung im Studium von Fluchtpunkten bei perspektivischen Zeichnungen. Projektive Geometrie beschäftigt sich mit denjenigen geometrischen Eigenschaften, die unter perspektivischen Abbildungen erhalten bleiben. Leider wird hierdurch auf den ersten Blick das Studium metrischer Eigenschaften und Objekte (wie Längen, Winkel, Kreise) scheinbar unmöglich, da diese unter perspektivischer Betrachtung nicht unverändert bleiben.

Julius Plücker (1801-1868) gelang als erstem die umfassende und elegante Beschreibung der projektiven Geometrie durch algebraische Operationen. Die von ihm eingeführten *homogenen Koordinaten* ermöglichen die vollkommen gleichwertige Behandlung von endlichen und unendlich fernen Elementen.

Felix Klein (1849-1925), der Schüler von Plücker war, gelang letztlich eine Synthese von projektiver Geometrie und metrischer Geometrien durch geschickte Einbeziehung von *komplexen Zahlen* in das algebraische System. Das von ihm erstellte Gebäude der *Cayley-Klein-Geometrien* stellt eine überraschend elegante Einbettung von Metriken in die projektive Geometrie dar. Die wohl überraschendste Tatsache ist hierbei, dass Kleins Theorie so umfassend ist, dass sie nicht nur die euklidische Geometrie zu beschreiben vermag, sondern auch *nicht-euklidische Geometrien* (hyperbolische und elliptische Geometrie), in denen Euklids Parallelenaxiom nicht mehr gilt. Diese nicht-euklidischen Geometrien zeichnen sich von der herkömmlichen euklidischen Geometrie durch eine verzerrte Winkel- und

Längenmessung aus. Diese “verzerrte Massbestimmung” führt unter anderem dazu, dass in hyperbolischer Geometrie die Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180° ist, oder dass es Pflasterungen der Ebene mit regulären 5-Ecken gibt (Abb. 1, rechts).

Das dynamische Geometrieprogramm *Cinderella* basiert auf den eben erwähnten algebraischen Prinzipien. Hierdurch gelang es, ein Programm zu schaffen, in welchem euklidische, sowie nicht-euklidische Geometrien, gleichermassen behandelt und erfahrbar gemacht werden können. Die folgenden Abschnitte sollen in die dahinterliegenden Strukturen und Prinzipien einführen und ein wenig von der Schönheit der algebraischen Ansätze vermitteln.

3. VON EUKLIDISCHER ZU PROJEKTIVER GEOMETRIE

3.1. Elemente euklidischer Geometrie. Im folgenden wollen wir uns mit geometrischen Grundelementen, und grundlegenden Operationen beschäftigen. Wir beschränken uns hierbei vollkommen auf den ebenen Fall, wenngleich Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionen nicht allzu schwierig sind. Als Grundelemente betrachten wir *Punkte*, *Geraden*, *Kreise* und *Kegelschnitte* (Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln). Die grundlegenden Operationen sind z.B. das Zeichnen der Verbindungsgeraden zweier Punkte, das Bestimmen des Schnittpunktes zweier Geraden, das Zeichnen eines Kreises mit gegebenem Mittelpunkt und (abgetragenen) Radius, das Fällen eines Lotes, das Schneiden zweier Kreise, etc. Es ist charakteristisch für euklidische Geometrie, dass die Durchführbarkeit einer Operation im allgemeinen stark von der speziellen Lage der beteiligten Elemente abhängt. So haben z.B. zwei Geraden nur dann einen Schnittpunkt, wenn sie nicht parallel sind. Auch die Existenz der Schnittpunkte zweier Kreise hängt massiv von ihrer Lage ab. Ein “naiver” Ansatz für die interne Repräsentation der Objekte könnte z.B. folgendermassen aussehen:

- *Punkte* seien dargestellt durch ihre (x, y) -Koordinaten.
- *Geraden* seien dargestellt durch die Parameter (a, b, c) einer definierenden Gleichung $ax + by = c$.
- *Kreise* seien dargestellt durch Mittelpunkt (m_x, m_y) und Radius r .

Bei einer solchen Darstellung müssen die oben erwähnten Spezialfälle durch interne Abfragen im Programm abgefangen werden. Schnitte paralleler Geraden werden dann in aller Regel als *ungültig* markiert und können zur weiteren Berechnung nicht mehr herangezogen werden. In der Tat ist dies genau die Situation, wie man sie in den meisten Geometrieprogrammen wiederfindet. *Cinderella* geht hier einen anderen Weg. Es wird versucht den Begriff der Geometrie so weit zu verallgemeinern, dass die Behandlung von Sonderfällen so weit wie möglich überflüssig wird.

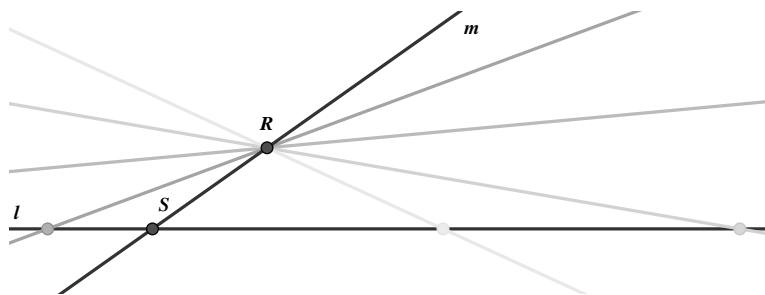


Abb. 2: Schleifende Schnitte von Geraden Verschwinden im Unendlichen und kommen von der anderen Seite zurück.

3.2. Unendlich ferne Elemente. Ein erster Schritt in diese Richtung ist das Einbeziehen unendlich ferner Elemente. Hierzu “postuliert” man, dass Parallelen (gegen jede Erfahrung) *doch* einen Schnitt haben. Dieser Schnitt soll unendlich weit weg liegen. Alle Parallelen der gleichen Richtungsschar haben einen einzigen Schnittpunkt im Unendlichen gemeinsam. Man erhält somit also für jede mögliche Richtung einen zusätzlichen Fernpunkt. Ferner postuliert man, dass alle diese Fernpunkte gemeinsam eine Gerade bilden, die *Gerade im Unendlichen*. Durch diese scheinbare Verkomplizierung erhält man eine Struktur bemerkenswerter Geschlossenheit und Eleganz. In der projektiven Geometrie lässt man nun die Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Elementen vollkommen fallen und wird auf folgende einfachen Regeln geführt:

- Zwei verschiedene Geraden haben *genau einen* Schnittpunkt.
- Zwei verschiedene Punkte haben *genau eine* Verbindungsgerade.

Um ein wenig der anschaulichen Evidenz der unendlich fernen Punkte zu spüren stelle man sich am besten folgende Situation vor (Abb. 2). Man betrachtet zwei sich schneidende Geraden l und m mit Schnittpunkt S . Wir lassen nun die Gerade m um einen von S verschiedenen Punkt R rotieren. Bei dieser Rotation wird sich der Punkt S entlang der Geraden l immer weiter fortbewegen. In dem Moment, wo m und l parallel sind, wird der Punkt S ins Unendliche “verschwinden” sein, um gleich darauf aus der anderen Richtung wieder zurückzukehren. In der projektiven Geometrie wird nun der Parallelsituation keinerlei Sonderrolle zugesprochen: der Punkt S *ist* dann im Unendlichen.

3.3. Homogene Koordinaten. Ein naiver Koordinatenansatz bei dem Punkte als (x, y) Vektoren dargestellt werden, ist zu unflexibel um auch noch unendlich ferne Elemente zu fassen. In ihm können lediglich endliche Punkte dargestellt werden. Die Situation wird besser, wenn wir die übliche euklidische Ebene in den dreidimensionalen Raum einbetten. Wir stellen uns hierzu eine Kugel (vom Radius 1) tangential an den Koordinatenursprung

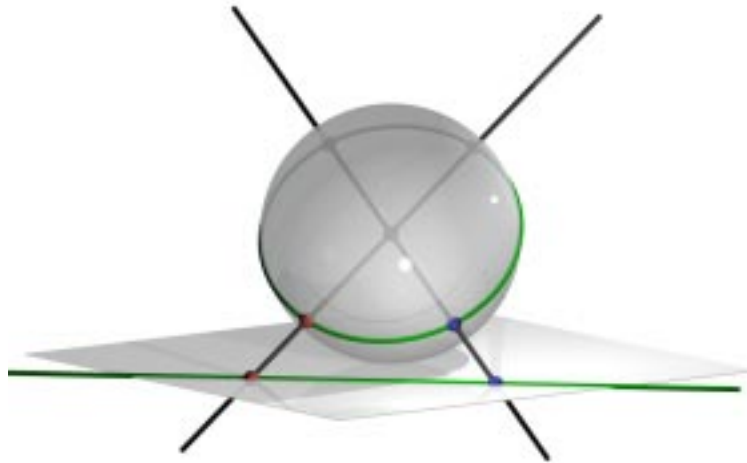


Abb. 3: Projektion der Ebene auf die Kugel.

der Ebene angelegt vor (Abb. 3). Dann projizieren wir die Punkte der Ebene vom Mittelpunkt der Kugel auf die Kugeloberfläche. Durch diese Zentralprojektion wird jedem Punkt der Ebene zwei sich diametral gegenüberliegende Punkte auf der Kugeloberfläche zugeordnet. Das Bild der euklidischen Ebene überdeckt dabei allerdings nicht die gesamte Kugeloberfläche. Die Kugel berührt die Ebene im “Südpol”, also bleibt der Äquator unüberdeckt. Die Punkte auf dem Äquator entsprechen genau den unendlichen fernen Punkten. Auch hier ist es hilfreich sich den Grenzübergang bildhaft zu vergegenwärtigen. Liegt die Kugel im Ursprung eines dreidimensionalen (x, y, z) -Koordinatensystems \mathbb{R}^3 und identifizieren wir die euklidische Ebene mit der Ebene $z = -1$, so wird ein Punkt (x, y) der Ebene auf die Punkte

$$p_1 = + \frac{(x, y, -1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad \text{und} \quad p_2 = - \frac{(x, y, -1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

der Kugel abgebildet. Wandert der Punkt immer mehr ins Unendliche, so nähern sich dessen Bilder auf der Kugel immer mehr dem Kugeläquator. Die Bilder der Fernpunkte haben Koordinaten der Form $(x, y, 0)$. Geraden in der Ebene werden durch diese Abbildung auf Grosskreise der Kugel abgebildet. Die Gerade im Unendlichen (auf der ja alle Fernpunkte liegen) entspricht genau dem Äquator.

Anstatt nun mit den zweidimensionalen Koordinaten der Ebene zu rechnen, repräsentieren wir Punkte durch ihre entsprechenden Bilder auf der

Kugeloberfläche. Für die algebraische Behandlung dieser Punkte im Rahmen der projektiven Geometrie ist ein gemeinsamer Vorfaktor der Koordinaten unerheblich (man kann ja jederzeit auf die Kugeloberfläche “herunternormieren”). Demgemäss stellen wir die Punkte der Ebene einfach als von $(0, 0, 0)$ verschiedene Vektoren (x, y, z) dar. Vektoren, die sich nur durch ein von Null verschiedenes Vielfache unterscheiden, repräsentieren den gleichen Punkt. Will man die ursprünglichen zweidimensionalen Koordinaten zurückerhalten, erhält man diese einfach durch eine Abbildung.

$$(x, y, z) \mapsto (-x/z, -y/z)$$

Diese Rückabbildung ist natürlich für die unendlich fernen Punkte (die der Form $(x, y, 0)$) nicht durchführbar.

Geraden repräsentieren wir weiterhin durch die Parameter (a, b, c) der entsprechenden Gleichung $ax + by = c$. Der Vektor (a, b, c) hat eine bemerkenswerte geometrische Interpretation. Er ist ein Normalenvektor der Ebene, in welcher der zur Geraden gehörige Grosskreis liegt. Auch hier repräsentieren beliebige Vielfache dieses Vektors die gleiche Gerade. Die Gerade im Unendlichen ist durch den Vektor $(0, 0, 1)$ repräsentiert.

Wie die Symmetrie der Kugel sofort zeigt wird durch diese Darstellung jegliche Sonderrolle der unendlich fernen Elemente gegenüber den endlichen Elementen aufgehoben. Diese Darstellung von Punkten und Geraden durch Dreiervektoren wird *homogene Koordinaten* genannt.

3.4. Einfachste Operationen. Ein Punkt $p = (x, y, z)$ liegt auf der Geraden $l = (a, b, c)$ genau dann wenn, diese beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$ax + by + cz = 0$$

gilt, also das Skalarprodukt $p \cdot l$ verschwindet. An dieser sehr einfachen Gleichung kann man erkennen, das in projektiver Geometrie die Rollen von Punkten und Geraden vertauschbar sind. Dahinter verbirgt sich eine tiefliegende *Dualität* die sich durch die gesamte projektive Geometrie zieht. Hierauf soll aber zunächst nicht eingegangen werden.

Wie berechnet man nun die Verbindungsgerade zweier Punkte $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Gesucht ist ein Vektor $l = (a, b, c)$, der senkrecht auf beiden Vektoren p_1 und p_2 steht. Solch ein Vektor ist genau durch das dreidimensionale Kreuzprodukt

$$p_1 \times p_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2, -x_1 z_2 + z_1 x_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

gegeben. Man erhält

$$l = p_1 \times p_2.$$

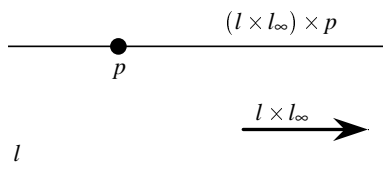


Abb. 4: Berechnung einer Parallelen.

Vollkommen analog berechnet sich der Schnittpunkt zweier Geraden $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$ und $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Auch hier ist ein Vektor $p = (x, y, z)$ gesucht, der senkrecht auf den beiden anderen steht. Man erhält als Formel für den Schnittpunkt

$$p = l_1 \times l_2.$$

Insbesondere ergibt sich als Schnitt zweier paralleler Geraden der entsprechende unendlich ferne Schnittpunkt.

In *Cinderella* sind Punkte und Geraden durch homogene Koordinaten dargestellt. Die zwei Grundlegenden Operationen *Schnittpunkt* und *Verbindungsgerade* sind einfach durch Kreuzprodukte realisiert. Es ist keinerlei (!) Behandlung von Spezialfällen notwendig.

Man kann die bisher eingeführten Operationen auch benutzen, um auf elegante Weise die (euklidische) Parallele zu einer Geraden l durch einen Punkt p zu bestimmen (Abb. 4). Man muss hier allerdings zunächst die Gerade im Unendlichen $l_\infty = (0, 0, 1)$ als ausgezeichnetes Element einführen. Die Berechnung der Parallelen q kann dann wie folgt durchgeführt werden

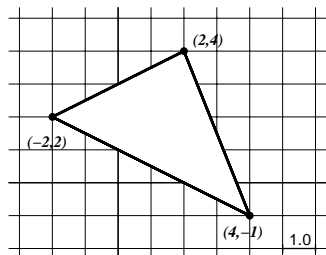
$$q = (l \times l_\infty) \times p.$$

Mittels $l \times l_\infty$ wird zuerst der Fernpunkt in Richtung l bestimmt (der Schnitt von l mit der Geraden im Unendlichen). Sodann wird die Verbindungsgerade von diesem Fernpunkt mit Punkt p bestimmt. Dies ist die gesuchte Parallele.

Das Einführen von speziellen Elementen wie l_∞ zum Beschreiben geometrischer Besonderheiten wird uns im Folgenden noch beschäftigen.

3.5. Determinanten. Determinanten spielen bei der algebraischen Repräsentation der projektiven Geometrie eine herausragende Rolle. Sie sind in gewisser Weise die kleinsten Formeln, deren Verhalten durch perspektivische oder projektive Abbildungen nicht (wesentlich) beeinflusst wird. Ferner kann man zeigen, dass sich jede projektiv invariante Eigenschaft als Polynom in Determinanten schreiben lässt (dies ist der "erste Fundamentalsatz der Invariantentheorie").

Nehmen wir uns als Beispiel die einfachste Eigenschaft, die unter perspektivischen oder projektiven Abbildungen nicht zerstört wird: "drei Punkte p , q , und r sind kollinear." Haben die Punkte die homogenen Koordinaten



$$\det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 24 = 2 \cdot \text{Area}(\Delta).$$

Abb. 5: Flächenberechnung eines Dreiecks.

(p_1, p_2, p_3) , (q_1, q_2, q_3) und (r_1, r_2, r_3) , so lässt Kollinearität wie folgt algebraisch ausdrücken:

$$\det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Eine Möglichkeit sich dies klarzumachen ergibt sich aus der Beobachtung, dass für Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) der normalen euklidischen Ebene der Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Dreiecks sich zum halben Wert der 3×3 -Determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \text{Flächeninhalt}.$$

ergibt (Abb. 5). Ist die Fläche Null, so sind die drei Punkte kollinear.

3.6. Kegelschnitte. Kegelschnitte erhält man durch Projektion eines Kreises auf die Ebene. Je nach Lage des Kreises, und des Projektionspunktes können hierbei Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln entstehen. Algebraisch lassen sich Kegelschnitte als Lösungsgebilde von quadratischen Gleichungen beschreiben. In homogenen Koordinaten hat die allgemeine Kegelschnittgleichung die Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0.$$

Im Sinne der projektiven Geometrie gibt es keine eigentliche Unterscheidung zwischen Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln. Sie alle stellen einfach geschlossene Kurven dar. Die Frage, welcher der drei Fälle vorliegt, lässt sich erst nach der Einführung der Geraden im Unendlichen l_∞ beantworten. Eine Ellipse hat keinen Schnittpunkt mit l_∞ , eine Parabel genau einen und eine Hyperbel zwei. Kegelschnitte repräsentiert man am besten durch die Parameter (a, b, c, d, e, f) ihrer Gleichung, wobei es auch hier auf skalare Vielfache nicht ankommt.

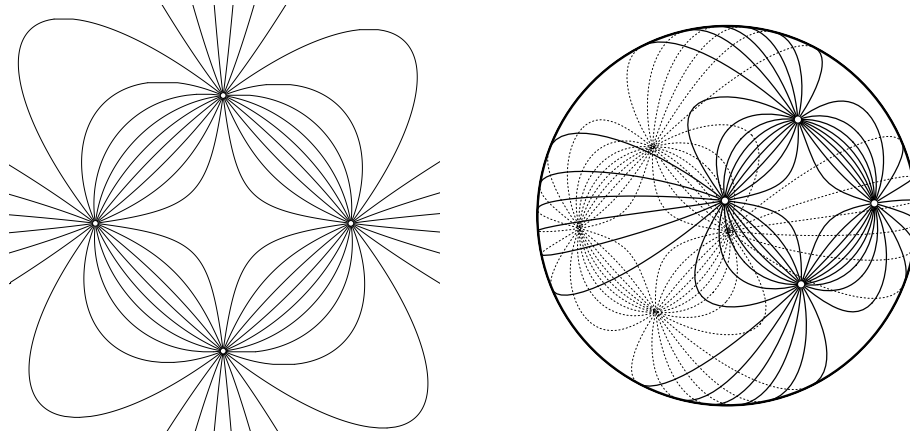


Abb. 6: Scharen von Kegelschnitten durch vier Punkte.

Insbesondere sind auch Kreise spezielle Kegelschnitte. Bei Ihnen ist $a = b$ und $d = 0$. Dementsprechend haben Kreise die Gleichung

$$x^2 + y^2 + cz^2 + exz + fyz = 0.$$

In *Cinderella* wird intern nicht zwischen Kreisen und allgemeinen Kegelschnitten unterschieden. Kreise sind einfach Kegelschnitte mit speziellen Koordinaten. An dieser Stelle ist es wichtig festzustellen, dass ein Kreis als Menge aller Punkte die vom Mittelpunkt einen festen Abstand haben eigentlich ein *metrisches Objekt* ist, da dessen Definition auf den Begriff des Abstands zurückgreift.

4. KOMPLEXE ZAHLEN

4.1. Ursprünge. Bei aller Eleganz hat die Einführung von homogenen Koordinaten zunächst einen (scheinbaren) Nachteil: es ist nicht offensichtlich, wie sich mittels homogener Koordinaten metrische Begriffe wie Abstand, Winkel, Senkrechtstehen, Kreise etc. übersichtlich und einfach ausdrücken lassen. Tatsächlich führt der Weg von projektiver Geometrie zurück zur Metrik nur über das Gebiet der komplexen Zahlen. Wir wollen hier zunächst die Auswirkungen von komplexen Zahlen auf die Behandlung von Sonderfällen analysieren.

Die historischen Ursprünge komplexer Zahlen liegen eigentlich im Lösen von Polynomgleichungen. Obwohl komplexe Zahlen auch schon beim Lösen quadratischer Gleichungen ein nützliches Hilfsmittel sind, traten sie historisch erstmalig beim Lösen kubischer Gleichungen auf. Dort ist ein Verstehen der Lösungsgesamtheit (auch der rein reellen Lösungen) nur durch Einführung von komplexen Zahlen möglich. Diese Beobachtung

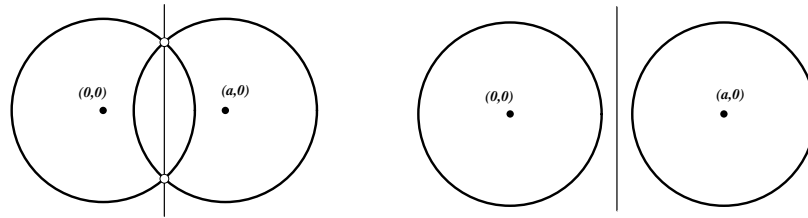


Abb. 7: Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte zweier Kreise ist immer reel, selbst wenn die Punkte komplex werden.

wurde erstmalig von *Girolamo Cardano* (1501-1576) systematisch durchgeführt, wenngleich er nicht der erste war, der über einen Lösungsweg für kubische Gleichungen verfügte.

4.2. Komplexe Zahlen und Geometrie. Wir wollen uns die Rolle der komplexen Zahlen zunächst am Beispiel quadratischer Gleichungen klarmachen. Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erhält man nach der bekannten p, q -Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Reelle Lösungen existieren nur, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht-negativ ist. So hat z.B. die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung. Komplexe Zahlen erweitern nun den Bereich der reellen Zahlen durch Hinzunahme einer Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Die Zahl i ist quasi eine formale Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Natürlich hat die Zahl i keine Entsprechung auf der reellen Zahlengeraden, da das Produkt zweier reeller Zahlen immer positiv ist. Bis auf obige Regel erfolgt das Rechnen mit der *imaginären Einheit* i genauso wie mit jeder anderen Zahl. Die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} sind nun alle Zahlen der Form $z = a + ib$, wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind. Die Wurzel einer negativen Zahl $-a$ ergibt sich nun als $\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}$.

Durch Hinzunahme der imaginären Einheit sind nun alle quadratischen Gleichungen formal lösbar geworden. So hat z.B. die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 13 = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = 2 + 3i$ und $x_2 = 2 - 3i$, wie man durch Einsetzen leicht nachrechnen kann.

$$(2 + 3i)(2 + 3i) - 4 \cdot (2 + 3i) + 13 = 4 + 12i + 9i^2 - 8 - 12i + 13 = 0$$

Erstaunlicherweise hat man durch Einführung von komplexen Zahlen noch viel mehr gewonnen: *Im Bereich der komplexen Zahlen sind Polynomgleichungen beliebigen Grades immer lösbar.*

Aus der Tatsache, dass komplexe Zahlen beliebige Polynomgleichungen zu lösen vermögen, ergibt sich eine interessante Konsequenz für die

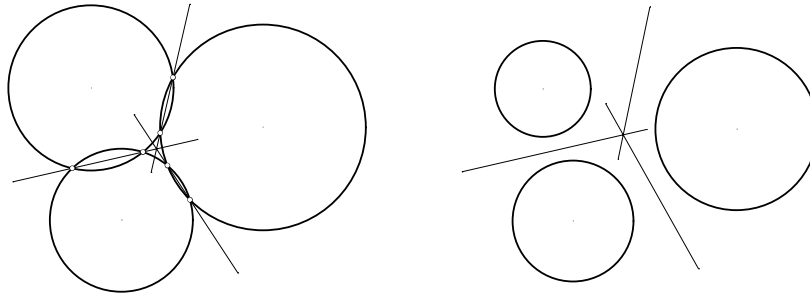


Abb. 8: Gegeben seien drei Kreise. Für jedes Paar zieht man die Verbindungsgerade der zwei Schnittpunkte. Die drei entstehenden Geraden sind reell und schneiden sich, unabhängig ob die Schnittpunkte reell sind oder komplex.

Behandlung von Sonderfällen in der Geometrie. Wie bereits erwähnt wurde, ist das Schnittpunkt bilden zweier Kreise nicht immer durchführbar. Es hängt sehr von der speziellen Lage der Kreise ab (Abb. 7). Nun ist aber das Auffinden der Schnitte zweier Kreise nichts anderes als das Lösen einer quadratischen Gleichung. Unter Einbeziehung komplexer Zahlen finden wir somit *immer* Schnittpunkte, es kann lediglich passieren, dass deren Koordinaten komplex werden. Betrachten wir z.B. den Schnitt des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ mit dem um einen Wert $2t$ in x Richtung verschobenen Kreis $(x - 2t)^2 + y^2 = 1$. Als Lösung erhält man die beiden Schnittpunkte mit homogenen Koordinaten

$$(t, \sqrt{1-t^2}, 1) \quad \text{und} \quad (t, -\sqrt{1-t^2}, 1).$$

Wird t grösser als 1, so wird die y -Koordinate der Punkte komplex. Bemerkenswerterweise ist die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte immer reell, wie man durch Ausrechnen des Kreuzproduktes leicht nachrechnen kann. In unserem speziellen Fall ist dies genau die Mittelsenkrechte der beiden Kreismittelpunkte.

Zwischenergebnisse können also komplex sein, obwohl davon abgeleitete Größen wieder reell werden können (Abb. 7+8). *Cinderella* rechnet intern konsequent mit komplexwertigen Koordinaten, deren Imaginärteil jedoch oftmals verschwindet. Dies führt zu einer weiteren Reduktion der zu betrachtenden geometrischen Fallunterscheidungen.

5. METRIK

5.1. Rechnen mit komplexen Zahlen. Komplexe Zahlen der Form $a + ib$ können als Punkte in der Ebene aufgefasst werden (Abb. 9). Man trägt auf der x -Achse den Realteil a ab und auf der y -Achse den Imaginärteil b . Alternativ kann eine komplexe Zahl $z = a + ib$ auch durch ihren Winkel θ zur reellen Achse und deren Abstand r zum Ursprung angegeben werden. Ein

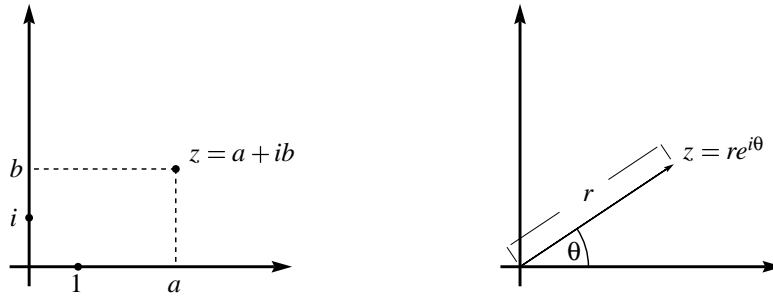


Abb. 9: Komplexe Zahlen als Vektoren und in Polarkoordinaten.

bemerkenswertes Resultat von Euler zeigt den Zusammenhang von komplexen Zahlen in Polarkoordinaten und der Exponentialfunktion auf. Es gilt:

$$z = re^{i\theta}.$$

Die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen kann ebenso geometrisch interpretiert werden (Abb. 10). Addition einer komplexen Zahl zu einer anderen entspricht einfach der Vektoraddition in der Ebene. Multiplikation zweier Zahlen $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entspricht einer Drehstreckung, da gilt

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Die Längen der Zahlen multiplizieren sich, die Winkel addieren sich.

5.2. Winkel. Wie kann man nun komplexe Zahlen zum Bestimmen von Winkeln und Entfernungen heranziehen? Betrachten wir zunächst den Fall der Winkelbestimmung zwischen zwei Geraden. Angenommen die Geraden haben homogene Koordinaten

$$l = (l_1, l_2, l_3) \quad \text{und} \quad m = (m_1, m_2, m_3).$$

Die “verkürzten” Vektoren (l_1, l_2) und (m_1, m_2) stellen genau (ebene) Normalenvektoren auf den beiden Geraden dar. Und bilden daher den gleichen

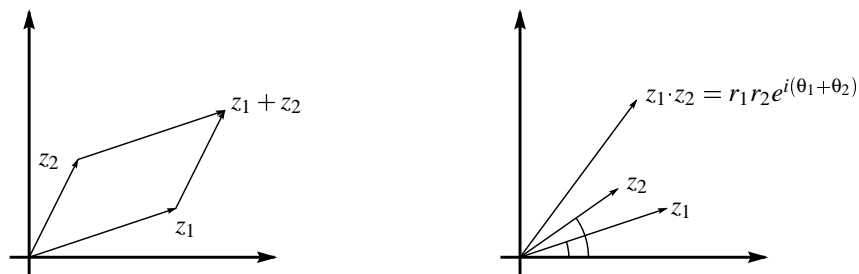


Abb. 10: Addition und Multiplikation komplexer Zahlen.

Winkel zueinander wie die ursprünglichen Geraden. Fassen wir diese als komplexe Zahlen $z_l = l_1 + il_2 = r_l e^{i\theta_l}$ und $z_m = m_1 + im_2 = r_m e^{i\theta_m}$ auf, so kann man aus diesen Zahlen den Winkel zwischen l und m berechnen. Wir müssen lediglich den Winkel $\theta_l - \theta_m$ aus den beiden Zahlen z_l und z_m extrahieren. Dies geschieht folgendermassen. Der Quotient z_l/z_m ist dann

$$\frac{z_l}{z_m} = \frac{r_l}{r_m} e^{i(\theta_l - \theta_m)}.$$

Diese Zahl enthält bereits die gesuchte Winkeldifferenz. Wir müssen nun noch den Betrag r_l/r_m "wegdiskutieren". Dazu definieren wir zunächst die *konjugierten* von z_l und z_m als $\bar{z}_l = l_1 - il_2 = r_l e^{-i\theta_l}$ und $\bar{z}_m = m_1 - im_2 = r_m e^{-i\theta_m}$. Diese Konjugierten erhält man geometrisch aus z_l und z_m durch Spiegelung an der reellen Achse. Nun berechnen wir:

$$\frac{z_l}{z_m} \bigg/ \frac{\bar{z}_l}{\bar{z}_m} = \frac{r_l}{r_m} \bigg/ \frac{\bar{r}_l}{\bar{r}_m} \cdot e^{i(2\theta_l - 2\theta_m)} = e^{i(2\theta_l - 2\theta_m)}$$

Durch Ziehen des Logarithmus erhalten wir

$$\theta_l - \theta_m = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{z_l}{z_m} \bigg/ \frac{\bar{z}_l}{\bar{z}_m} \right).$$

5.3. Die Punkte I und J. Das besondere an der letzten Formel ist, dass sie sich auch allein aus projektiven Operationen über homogenen Koordinaten durch Determinanten darstellen lässt. Dies geschieht ähnlich wie beim Benutzen der Geraden im Unendlichen zum Berechnen von Parallelen durch Hinzunahme von speziellen Elementen. Diese speziellen Elemente werden meistens mit I und J bezeichnet und haben die komplexen homogenen Koordinaten

$$I = (i, -1, 0) \quad \text{und} \quad J = (i, 1, 0).$$

Betrachten wir nun die Determinante gebildet aus l , I und l_∞

$$\det \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = l_1 + il_2 = z_l.$$

Diese Determinante extrahiert genau die benötigte komplexe Zahl z_l . Analog berechnen wir z_m , \bar{z}_m und \bar{z}_l . Wir kürzen 3×3 -Determinanten der homogenen Koordinaten dreier Punkte oder Geraden A , B und C der Einfachheit halber mit $[A, B, C]$ ab und erhalten als Formel für den gesuchten Winkel:

$$\theta_l - \theta_m = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{[l, I, l_\infty][m, J, l_\infty]}{[m, I, l_\infty][l, J, l_\infty]} \right).$$

Der Ausdruck in der Klammer ist das sogenannte *Doppelverhältnis* der Elemente $(l, m | I, J)$ auf der Geraden im Unendlichen l_∞ . Das Doppelverhältnis spielt in der gesamten projektiven Geometrie eine grosse Rolle.

Der Zahlenwert des Doppelverhältnisses bleibt unter perspektivischen oder projektiven Abbildungen erhalten und ist somit eine sogenannte *projektive Invariante*. Wir werden das Doppelverhältnis auch später noch benötigen und kürzen es mit $DV_{l_\infty}(l, m | \mathbb{I}, \mathbb{J})$ ab. Die Formel für den Winkel liest sich somit als

$$\theta_l - \theta_m = \frac{1}{2i} \ln(DV_{l_\infty}(l, m | \mathbb{I}, \mathbb{J}))$$

Diese Formel wurde erstmalig im Jahre 1853 von *Laguerre* (1834-1886) im Alter von 19 Jahren entdeckt. Felix Klein schreibt darüber in seinen 1928 erschienenen “Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie”:

“Dieses schöne Resultat [...] blieb aber lange unbeachtet, vermutlich, weil sich die Geometer an den Gedanken gewöhnt hatten, daß Metrik und projektive Geometrie in keiner Beziehung zueinander ständen.”

Laguerres Formel und die Punkte \mathbb{I} und \mathbb{J} sind der Schlüssel zur Einbeziehung von Metriken (euklidisch und nicht-euklidisch) in die projektive Geometrie.

5.4. Kreise und \mathbb{I} und \mathbb{J} . Die Punkte \mathbb{I} und \mathbb{J} werden auch als die *imaginären Kreispunkte* bezeichnet. Sie stehen zu Kreisen in folgender ebenso einfachen wie verblüffenden Beziehung:

Alle Kreise verlaufen durch \mathbb{I} und \mathbb{J} .

Kreise sind genau die Kegelschnitte die durch \mathbb{I} und \mathbb{J} verlaufen.

Am einfachsten kann man sich von dieser Tatsache überzeugen wenn man \mathbb{I} und \mathbb{J} in die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 + cz^2 + exz + fyz = 0.$$

einsetzt. Die letzten drei Terme fallen weg, da $z = 0$ ist die ersten beiden Terme $x^2 + y^2$ verschwinden wegen $i^2 = -1$. Die Beziehungen von \mathbb{I} und \mathbb{J} zu Kreisen sind mannigfaltig und können hier leider nur gestreift werden. Eine der erstaunlichsten Tatsachen ist die folgende: Da \mathbb{I} und \mathbb{J} auf jedem Kreis K liegen, kann man durch sie eindeutige Tangenten an K anlegen. Schneidet man diese beiden Tangenten, so erhält man genau den Mittelpunkt des Kreises. Eine entsprechende Operation für allgemeine Kegelschnitte liefert die Brennpunkte des Kegelschnitts.

6. NICHT-EUKLIDISCHE GEOMETRIE

6.1. Cayley-Klein-Geometrien. Die grosse Leistung Felix Kleins war es, die Formel von Laguerre als Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Musters zu erkennen. Die sogenannten Cayley-Klein-Geometrien stellen

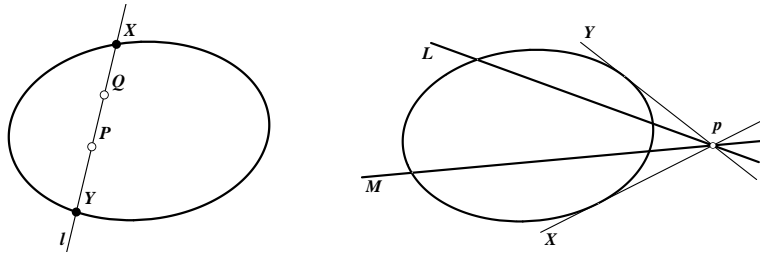


Abb. 11: Zur Massbestimmung in Cayley-Klein Geometrien.

ein allgemeines System dar, in dem sich sowohl euklidische als auch hyperbolische und elliptische Geometrie mittels projektiver Geometrie (und komplexer Zahlen) beschreiben lassen.

Die grundlegende Idee ist hierbei die Massbestimmung (das Messen von Winkeln und Längen) auf einen Kegelschnitt zu beziehen. Dieser Kegelschnitt wird das *Fundamentalgebilde* der Geometrie genannt. Zudem müssen zwei Normierungskonstanten c_{dist} und c_{ang} für Winkel und Längen gewählt werden.

Hat man das Fundamentalgebilde F und die zwei Normierungskonstanten gewählt, so ergibt sich die Abstandsmessung zweier Punkte P und Q wie folgt (Abb. 11, links): man zeichnet die Verbindungsgerade l von P und Q . Den Schnitt dieser Gerade mit dem Fundamentalgebilde besteht aus zwei Punkten X und Y . Der Abstand von P zu Q berechnet sich nun (per Definition) zu

$$d = c_{\text{dist}} \cdot \ln(DV_l(P, Q|X, Y)).$$

In vollkommen dualer Weise ergibt sich die Winkelmessung zweier Geraden L und M wie folgt (Abb. 11, rechts): man zeichnet den Schnittpunkt p von L und M . Die Tangenten dieses Punktes an das duale Fundamentalgebilde sind zwei Geraden X und Y . Der Winkel zwischen L und M berechnet sich nun zu

$$\theta = c_{\text{ang}} \cdot \ln(DV_p(L, M|X, Y)).$$

Abhängig von der Wahl des Fundamentalobjektes entsteht bei dieser Messung entweder hyperbolische, elliptische, euklidische Geometrie oder eine von vier weiteren Möglichkeiten (darunter auch die Geometrie der Relativitätstheorie).

Im Falle hyperbolischer Geometrie wählt man das Fundamentalgebilde zu $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Dies ist der normale Einheitskreis. Üblicherweise beschränkt man sich beim Studium der hyperbolischen Geometrie auf das Innere dieser Kreisscheibe. Die angegebene Massbestimmung führt im Innern der Kreisscheibe zu Verhältnissen in denen die ersten vier Axiome Euklids gelten, aber das Parallelenpostulat durch unser Axiom $A5_{\text{hyp}}$ ersetzt wurde.

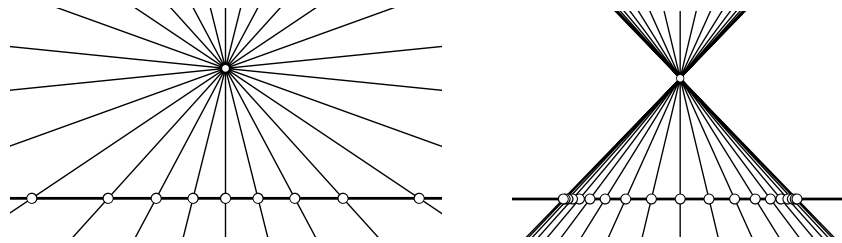


Abb. 12: Strahlen auf äquidistante Punkte in elliptischer und hyperbolischer Längenmessung.

Wählt man als Fundamentalgebilde den Kegelschnitt $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ergibt sich die elliptische Geometrie. Das Fundamentalgebilde besitzt überhaupt keine reellen Punkte. Alle Schnittpunkte und Tangenten die zur Durchführung der obigen Messung benötigt werden, haben komplexe Koordinaten. Die resultierende Geometrie entspricht der Situation auf einer Kugeloberfläche, wobei sich gegenüberliegende Punkte identifiziert werden. Die Längenmessung nach unserer Formel ergibt genau die Längenmessung durch Geodäten (kürzeste Wege) auf der Oberfläche der Kugel. Die Winkelmessung ist die sphärische. Geraden entsprechen Grosskreisen auf der Kugel. Da zwei Grosskreise immer zwei (antipodale) Schnittpunkte haben gibt es in dieser Geometrie überhaupt keine Parallelen.

Im Falle der euklidischen Geometrie ist das Fundamentalgebilde ein degenerierter Kegelschnitt, der mit der Geraden im Unendlichen zusammenfällt. Das entsprechende duale Fundamentalgebilde besteht aus den Punkten \mathbb{I} und \mathbb{J} . Die Winkelmessung spezialisiert sich genau zur Formel von Laguerre. Die Längenmessung ergibt zunächst einmal 0 für jeden Abstand. Dies kommt daher, dass es in euklidischer Geometrie keine *absolute* Längeneinheit gibt (im Gegensatz zu den beiden anderen Geometrien). Betrachtet man bei der Längenmessung jedoch Quotienten mit einer Einheitslänge, so ergibt sich (oh Wunder) die übliche euklidische Abstandsbestimmung.

6.2. Längenmessung. Abschliessend wollen wir uns noch ein wenig den Unterschied von hyperbolischer, elliptischer und euklidischer Längenmessung verdeutlichen. Die Formel für die der Längenmessung

$$d = c_{\text{dist}} \cdot \ln(DV_{\mathbb{I}}(P, Q|X, Y)).$$

definiert praktisch eine eigene Längenmessung auf jeder Geraden. Abhängig davon, ob die Gerade mit dem Fundamentalobjekt Null, einen oder zwei reelle Schnitte hat, ergeben sich drei qualitativ verschiedene Möglichkeiten.

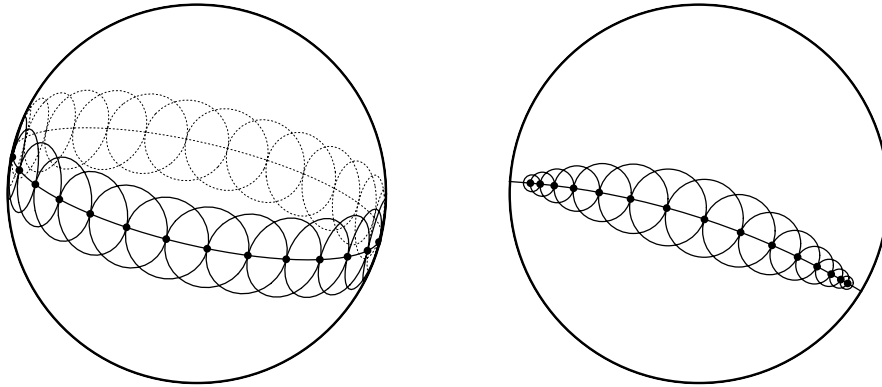


Abb. 13: Kreise gleicher Grösse in elliptischer und hyperbolischer Geometrie. Darstellung auf der Kugeloberfläche und in der Poincaré'schen Kreisscheibe.

Fall 1: Die Gerade hat *keinen* reellen Schnitt mit dem Fundamentalgebilde. In diesem Fall existieren die beiden Schnittpunkte dennoch, haben allerdings konjugiert komplexe Koordinaten. Rechnet man nach, so wird in diesem Falle das Doppelverhältnis von der Form $e^{i\theta}$ sein, also genau wie in Laguerres Formel den Betrag 1 haben. In diesem Falle verhält sich die Längenmessung sehr ähnlich zur Winkelmessung. In der Tat ergibt sich als Länge das selbe, wie wenn man "Blickwinkel" der Punkte auf der Geraden von einem geeigneten Punkt ausserhalb der Geraden misst (Abb. 12, links). In elliptischer Geometrie ist die Längenmessung prinzipiell auf jeder Geraden elliptisch. Geht man in Einheitsschritten entlang einer Geraden mit elliptischer Messung, kommt man irgendwann zum Ausgangspunkt zurück.

Fall 2: Die Gerade hat *zwei* reelle Schnitte mit dem Fundamentalgebilde. Dies ist der Fall hyperbolischer Längenmessung. Das Doppelverhältnis ist in diesem Falle rein reell. Rechnet man nach, so stellt man fest, dass wenn man in Einheitsschritten wandert entlang der Geraden wandert, man immer näher an die beiden Schnittpunkte mit dem Fundamentalgebilde herankommt sie aber nie ganz erreicht (Abb. 12, rechts). Dies spiegelt die Situation im Inneren der Kreisscheibe der hyperbolischen Ebene wieder, bei der die Massverhältnisse zum Rand hin immer enger zu werden scheinen. Bei hyperbolischer Geometrie ist die Massbestimmung auf jeder Geraden, die die Kreisscheibe des Fundamentalobjektes schneidet, hyperbolisch. Auf Geraden, die ganz ausserhalb der Kreisscheibe liegen, hingegen elliptisch (da die Schnittpunkte nicht existieren) (Abb. 14).

Fall 3: Im Grenzfall, wo nur genau ein Schnittpunkt mit dem Fundamentalgebilde existiert, ergibt sich die Situation der normalen euklidischen Längenmessung.

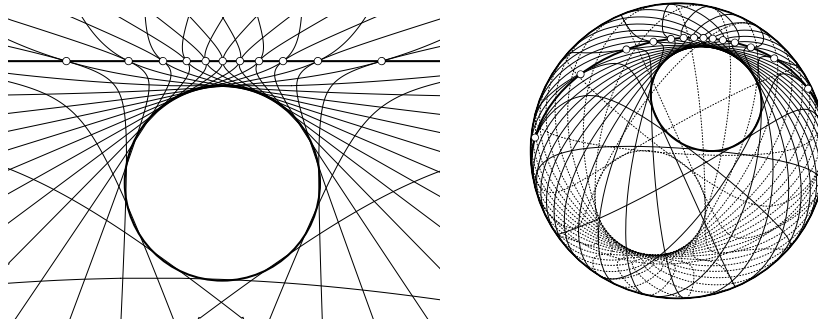


Abb. 14: "Kreise" gleicher Grösse in elliptischer Massbestimmung auf einer Geraden, die in hyperbolischer Geometrie die hyperbolische Kreisscheibe nicht schneidet. Für Experten und Ästheten.

7. WOZU DAS ALLES

Wozu dieser ganze Ausflug in die Tiefen der Cayley-Klein-Geometrie? Weil es erstaunlicherweise das Leben (zumindest, wenn man ein Geometrieprogramm schreibt) leichter macht. Die Allgemeinheit der Konzepte ermöglicht es, mit nicht-euklidischen Geometrien ebenso einfach umzugehen wie mit euklidischer Geometrie. Hat man einmal die konzeptuellen (und implementatorischen) Schwierigkeiten überwunden und die grundlegenden Basisoperationen implementiert, so können abgeleitete Operationen mit höchster Einfachheit erstellt werden. Der Benutzer braucht von alledem nahezu überhaupt nichts zu wissen. Für ihn ist nicht-euklidische Geometrie zum ebenso natürlichen Objekt wie euklidische Geometrie geworden. In *Cinderella* sind all diese Konzepte konsequent umgesetzt und wir hoffen, dass auf diese Weise auch "komplexere" geometrische Szenarien auf Akzeptanz bei Lehrern, Schülern und Mathematikern finden.

LITERATUR

- [1] H.S.M. Coxeter *Projective Geometry*, Springer, New York, Berlin, 1994 (orig. 1963).
- [2] H.S.M. Coxeter *The Real Projective Plane*, Springer, New York, 1992 (orig. 1949).
- [3] M.J. Greenberg *Euclidean and non-Euclidean Geometries*, (3rd ed.), Freeman and Company, New York, 1996 (orig. 1974).
- [4] F. Klein *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Springer, Berlin, reprinted 1968 (orig. 1928).
- [5] U.H. Kortenkamp & J. Richter-Gebert *Geometry and Education in the Internet Age*, ED-MEDIA 1998 World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications, pp. 790-799.
- [6] J. Richter-Gebert & U.H. Kortenkamp *The interactive geometry Software Cinderella*, Book & CD Edition, Springer-Verlag, Heidelberg (1999) Springer.
- [7] I.M. Yaglom *Felix Klein and Sophus Lie - Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteens Century*, Birkhäuser, Boston, Basel, 1988.